

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОГО ОТНОШЕНИЯ ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНИЗМА НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ О МГНОВЕННОМ ЦЕНТРЕ ВРАЩЕНИЯ

А.А. ГОЛОВНИН, канд. техн. наук

Тверской государственный технический университет, 170026, Тверь,
наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: golovninaa@rambler.ru

© Головнин А.А., 2022

Статья посвящена обоснованию возможности единого подхода к определению передаточного отношения механических передач как с подвижными, так и неподвижными осями. Показано, что вывод уравнений для передаточного отношения планетарного механизма, наряду с методом Виллиса, может быть произведен аналогично механическим передачам с неподвижными осями на основе понятия о мгновенном центре скоростей. Для этого планетарный механизм, подобно механическим передачам с неподвижными осями, нужно расчленить на два простых механизма, первый из которых должен содержать солнечное и планетарное колеса, а второй – планетарное колесо и водило, вращающиеся вокруг собственных мгновенных центров скоростей. Вывод уравнения имеет ту же логику рассуждений, что и графоаналитический метод Куцбаха – Смирнова. Совместное применение аналитического и графоаналитического методов с одной и той же природой позволяет совместить точность в первом случае и наглядность – во втором, что наиболее целесообразно в процессе обучения и способствует лучшему освоению кинематики планетарного механизма, обычно трудной для изучения.

Ключевые слова: планетарные механизмы, передаточное отношение, аналитический метод, мгновенный центр вращения.

DOI: 10.46573/2658-5030-2022-1-41-45

ВВЕДЕНИЕ

Все известные методы анализа кинематики планетарных передач, в том числе и аналитический метод обращения движения Виллиса, так или иначе основаны на теореме о сложении скоростей, которая связывает между собой скорости материальной точки в различных системах отсчета при сложном относительном движении [1].

Исключение составляет графоаналитический метод построения плана скоростей Куцбаха – Смирнова [2], который имеет более простую теоретическую основу – теорему о мгновенном центре вращения.

В учебном процессе принято аналитический метод исследования основывать на способе обращения движения по методу Виллиса [3–6]. Переход к механизму с остановленным водилом и обратно являет пример эвристического подхода для получения аналитического решения в конкретном случае. При этом ослабевает междисциплинарная связь и не поддерживается принцип преемственности и последовательности в обучении. Так, в классическом задачнике по теоретической механике приведены задачи с механизмами для передачи вращательного движения с шестерней с подвижной осью (задачи 15.3, 15.4 и другие) [7], решаемые на основе теоремы о мгновенном центре скоростей. Данная теорема лежит в основе графического способа определения передаточного отношения планетарного механизма методом

Куцбаха – Смирнова. На ее основе возможно определение передаточного отношения планетарных механизмов и в аналитической форме.

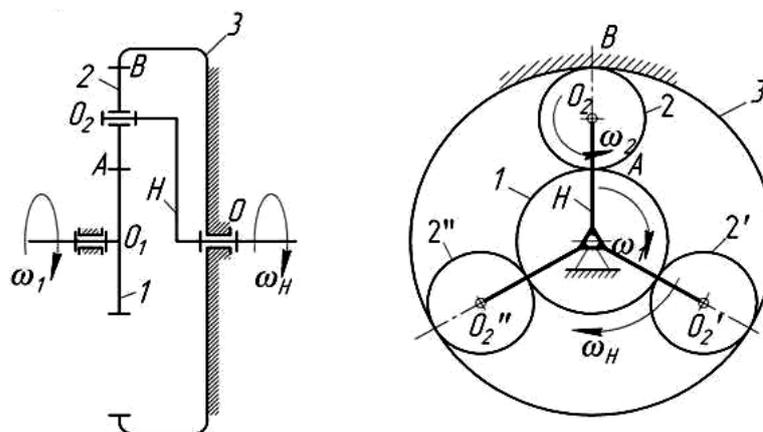
Цель работы – показать возможность аналитического определения передаточного отношения планетарного механизма путем выделения и анализа входящих в него простых механизмов (по аналогии с определением передаточного отношения рядовых зубчатых механизмов).

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Приводится аналитический метод определения передаточного отношения планетарного механизма на основе теоремы о мгновенном центре вращения. Вывод уравнений для обеих ступеней планетарного механизма базируется на понятии о мгновенном центре скоростей – одном из ключевых понятий кинематики плоскопараллельного движения. Заметим, что применительно к передачам с неподвижными осями также используется именно понятие о мгновенном центре скоростей, но в этом случае имеет место совпадение мгновенного центра скоростей с осью вращения и метод просто подразумевается.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПЕРЕДАТОЧНОГО ОТНОШЕНИЯ

Планетарная передача является сложным механизмом, в котором могут быть выделены простые механизмы – ступени. В представленном на рисунке планетарном механизме можно выделить два простых механизма, первый из которых содержит солнечное колесо 1 и планетарное 2, а второй – планетарное колесо 2 и водило Н, вращающиеся вокруг собственных мгновенных центров скоростей. Коронное зубчатое колесо 3 – неотъемлемая часть планетарной передачи. Оставаясь в процессе работы планетарного механизма неподвижным, оно участвует в передаче и преобразовании движения как опора для планетарных колес 2, 2', 2''. Индексы во всех приведенных далее формулах соответствуют обозначениям колес и водила на рисунке.



Кинематическая схема планетарного механизма

Колеса 1 и 2 зацепляются в точке А и имеют в ней равные окружные скорости: $v_1 = v_2$. Оба колеса находятся во вращении вокруг своих центров мгновенных скоростей – точек O_1 и B соответственно. С учетом этого угловые скорости звеньев $\omega_1 = \frac{v_1}{r_1}$ и $\omega_2 = \frac{v_2}{2r_2}$. Передаточное отношение этого механизма

$$u_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = (-) \frac{2r_2}{r_1}.$$

Колесо 2 и водило Н совершают вращательное движение вокруг своих центров мгновенных скоростей (точек В и О) и образуют вращательную кинематическую пару в т. О₂, в которой их окружные скорости равны: $v_2 = v_H$. С учетом этого угловые скорости звеньев $\omega_2 = \frac{v_2}{r_2}$ и $\omega_H = \frac{v_H}{r_H}$, где r_H – длина водила, $r_H = r_1 + r_2$. Передаточное отношение этого механизма

$$u_2 = \frac{\omega_2}{\omega_H} = (-) \frac{r_H}{r_2}.$$

Общее передаточное отношение имеет привычный для рядовых зубчатых механизмов вид

$$u_o = u_1 \cdot u_2 = (-) \frac{2r_2}{r_1} \cdot (-) \frac{r_H}{r_2} = \frac{2r_H}{r_1}. \quad (1)$$

Естественно, приведенный подход давно известен. Помимо учебной литературы по теоретической механике [7], данной в качестве примера, в курсе теории механизмов и машин [3] известен вывод формулы передаточного отношения для пары «планетарное колесо – водило» через их угловые скорости, но общее передаточное отношение всего механизма при этом приведено в виде двучлена аналогично уравнению, получаемому по методу Виллиса.

Правую часть полученного уравнения (см. формулу (1)) общего передаточного отношения можно привести к двучлену, аналогичному двучлену в формуле Виллиса:

$$u_o = 2 + \frac{2r_2}{r_1}. \quad (2)$$

Во всех формулах значения радиусов могут быть заменены на числа зубьев.

Нетрудно убедиться, что с учетом условия соосности $r_3 = r_1 + 2r_2$ оба выражения ((1) и (2)) тождественны формуле Виллиса:

$$u_o = 1 + \frac{r_3}{r_1}. \quad (3)$$

Аналогично могут быть получены формулы для других схем планетарных механизмов.

ВЫВОДЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Можно выделить несколько особенностей последовательности вывода и вида полученной формулы (1), выгодно отличающих ее от уравнения Виллиса (3):

1. Определение передаточного отношения планетарного механизма на основе теоремы о мгновенном центре вращения делает единой теоретическую основу для редукторов как с неподвижными, так и подвижными осями вращения. Формула (1) имеет тот же вид, что и формула для рядовых зубчатых механизмов, – вид произведения передаточных отношений ступеней, входящих в планетарный механизм. Геометрическая характеристика планетарного колеса 2 (см. рисунок), входящего в две ступени, при выводе формулы общего передаточного отношения (1) сокращается подобно геометрической характеристике паразитной шестерни в рядовых зубчатых механизмах с неподвижными осями. Радиус r_2 присутствует в формуле (2) косвенно, как входящий в формулу длины водила.

2. Формула передаточного отношения на основе теоремы о мгновенном центре вращения логично следует из теоретического материала, предшествующего изучению планетарных редукторов, в то время как для вывода формулы Виллиса применен эвристический подход, не следующий непосредственно из положений теоретической механики, теоретической основы теории механизмов и машин, а также не слишком очевидный для, например, студентов.

В формулу (1) входят геометрические характеристики только колес, участвующих в передаче вращательного движения от одного вала к другому (по аналогии с формулами для передач с неподвижными осями). Для сравнения в формулу передаточного отношения Виллиса (3) входит геометрическая характеристика неподвижного колеса, что делает формулу неочевидной с позиций физического смысла.

3. Уравнение в полученном виде делает более наглядным анализ зависимости кинематических свойств планетарных механизмов от геометрических параметров их звеньев. Так, из уравнения (2) можно сделать вывод о теоретически предельном значении передаточного отношения планетарного механизма по рассмотренной схеме $u_{o \min} = 2$, а с учетом, например, примерного равенства размеров солнечного и планетарного колес $u_o \approx 4$.

4. Вывод уравнения имеет ту же логику рассуждений, что и графоаналитический метод Куцбаха – Смирнова. В этом случае совместное рассмотрение аналитического и графоаналитического методов с одной и той же природой позволяет совместить точность в первом случае и наглядность – во втором, что способствует лучшему пониманию физической сути работы планетарного механизма, обычно трудной для изучения. Это позволяет рекомендовать рассмотренный вывод уравнения передаточного отношения планетарной передачи для использования в учебном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыплаков Ю.С. Бипланетарные механизмы. М.: Машиностроение. 1966. 96 с.
2. Руденко Н.Ф. Планетарные передачи: теория, применение, расчет и проектирование. М. – Л.: Машгиз. 1947. 756 с.
3. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. 1988. 640 с.
4. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин: учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. 1990. 590 с.
5. Тимофеев Г.А. Теория механизмов и машин: учебник и практикум для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт. 2021. 432 с.
6. Детали машин: учебник для вузов / Л.А. Андриенко, Б.А. Байков, М.Н. Захаров [и др.]; под ред. О.А. Ряховского. 4-е изд., перераб. и доп. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 465 с.
7. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие. 36-е изд., исправл. М.: Наука. 1986. 448 с.

Для цитирования: Головнин А.А. Определение передаточного отношения планетарного механизма на основе теоремы о мгновенном центре вращения // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2022. № 1 (13). С. 41–45.

DETERMINATION OF THE GEAR RATIO OF A PLANETARY MECHANISM BASED ON THE INSTANTANEOUS CENTER OF ROTATION THEOREM

A.A. GOLOVNIN, Cand. Sc.

Tver State Technical University, 22, Af. Nikitin emb.,
170026, Tver, Russian Federation, e-mail: golovninnaa@rambler.ru

The article is devoted to substantiating the possibility of a unified approach to determining the gear ratio of mechanical gears with both movable and fixed axes. It is shown that the derivation of equations for the gear ratio of a planetary mechanism, along with the Willis method, can be performed similarly to mechanical transmissions with fixed axes based on the concept of an instantaneous center of velocities. To do this, similarly to mechanical gears with fixed axes, the planetary mechanism must be divided into two simple mechanisms, the first of which contains a solar and planetary wheel, and the second – a planetary wheel and a carrier rotating around their own instantaneous centers of velocities. The derivation of the equation has the same reasoning logic as the graphoanalytic Kutzbach–Smirnov method. The combined use of analytical and graphoanalytic methods with the same nature allows you to combine accuracy in the first case, and visibility in the second, which is most appropriate in the learning process and contributes to better mastering the kinematics of the planetary mechanism, which is usually difficult to study.

Keywords: planetary mechanisms, gear ratio, analytical method, instantaneous center of rotation.

REFERENCES

1. Tsyplakov Yu.S. Biplanetarynye mekhanizmy [Biplanetary mechanisms]. Moscow: Mashinostroenie. 1966. 96 p.
2. Rudenko N.F. Planetarnye peredachi: teoriya, primeneniye, raschet i proektirovaniye [Planetary gears: theory, application, calculation and design]. Moscow – Leningrad: Mashgiz. 1947. 756 p.
3. Artobolevskiy I.I. Teoriya mekhanizmov i mashin [The theory of mechanisms and machines]. 4th ed., revised and expanded. Moscow: Nauka. 1988. 640 p.
4. Levitskiy N.I. Teoriya mekhanizmov i mashin: uchebnoye posobiye [Theory of mechanisms and machines: Textbook]. 2nd ed., revised and expanded. Moscow: Nauka. 1990. 590 p.
5. Timofeev G.A. Teoriya mekhanizmov i mashin: uchebnyy i praktikum dlya vuzov. [Theory of mechanisms and machines: Textbook and workshop for universities]. 4th ed., revised and expanded. Moscow: Yurayt. 2021. 432 p.
6. Detali mashin: uchebnyy dlya vuzov [Machine parts: Textbook for universities]. L.A. Andrienko, B.A. Baikov, M.N. Zakharov [et al.]. Pod red. O.A. Ryahovskogo. 4th ed., revised and expanded. Moscow: MGTU im. N.E. Bauman. 2014. 465 p.
7. Meshcherskiy I.V. Sbornik zadach po teoreticheskoy mekhanike: Uchebnoye posobiye [Collection of problems in theoretical mechanics: Textbook]. 36th ed., revised. Moscow: Nauka. 1986. 448 p.

Поступила в редакцию/received: 08.12.2021; после рецензирования/revised: 07.01.2022;
принята/accepted: 11.01.2022