

## **НОРМАЛЬНАЯ И КАСАТЕЛЬНАЯ ЖЕСТКОСТЬ ПЛОСКОГО СТЫКА ФРАКТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

М.А. ИЗМЕРОВ, канд. техн. наук, В.П. ТИХОМИРОВ, д-р техн. наук

Брянский государственный технический университет  
241035, Брянск, б-р 50 лет Октября, 7, e-mail: m.izmerov@yandex.ru

© Измеров М.А., Тихомиров В.П., 2022

В работе предложены фрактальная модель описания шероховатости и модель контактного взаимодействия для инженерных поверхностей. Получены результаты, характеризующие нормальную и тангенциальную жесткости плоского стыка. Проведено сравнение с литературными экспериментальными данными других исследований.

*Ключевые слова:* шероховатость, параметры шероховатости, жесткость, геометрическое моделирование, математические модели.

**DOI: 10.46573/2658-5030-2022-2-21-29**

### **ВВЕДЕНИЕ**

Поведение многих технических систем зависит от качества сопряженных поверхностей, выполняющих те или иные функции. Например, демпфирующая способность и вибрационная активность стыка соединений деталей машин в значительной мере определяются микрогеометрией сопряженных поверхностей. Авторами настоящей статьи использована фрактальная модель поверхности, которая наиболее полно описывает особенности структуры инженерных поверхностей и позволяет обосновать применение множества параметров шероховатости в рамках детерминированных и статистических моделей поверхности. Для поверхностей с малой площадью в ряде случаев волнистостью можно пренебречь.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода является поведение деформируемых неровностей. Учитывая особенности фрактальной структуры неровностей, полагаем, что в начале их сжатия гладким штампом происходит пластическое деформирование субмикрощероховатости верхней части выступов вследствие их малых радиусов. При увеличении сжимающей нагрузки и площади контакта формируются условия для реализации упругого состояния выступа. В полученных в работе зависимостях учитывается отличие размерного распределения площадей среза выступов от распределения площадей реальных пятен контакта, находящихся в упругом состоянии.

Цель работы: провести оценку нормальной и касательной жесткости плоского стыка инженерных поверхностей под нагрузкой на уровне шероховатости при моделировании контакта 3D-поверхностей на основе фрактальных представлений о структуре поверхности.

### **РАДИУС ЗАКРУГЛЕНИЯ ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ ВЫСТУПА**

Полагаем, что верхняя часть микровыступа неровности шероховатой поверхности в микромиллиметровом диапазоне измерения представляет собой сферу.

Используя уравнение Вейерштрасса – Мандельброта [1, 2] для фрактальных объектов, найдем высоту выступа, имеющего основание  $l$ :

$$h = G^{D-1}l^{2-D}, \quad 1 < D < 2, \quad (1)$$

где  $G$  – фрактальный параметр шероховатости;  $D$  – фрактальная размерность профиля поверхности. Рассмотрим деформацию выступа гладким штампом (рис. 1).

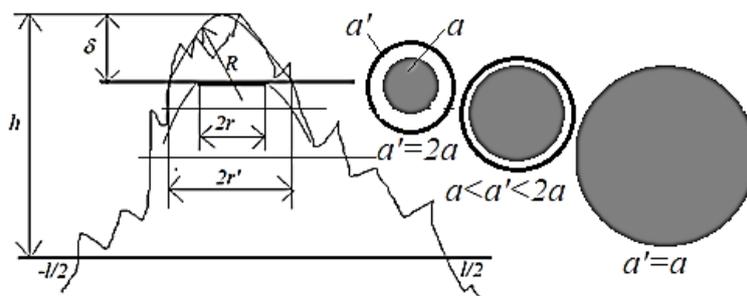


Рис. 1. Соотношение площадей среза микровыступа  $a'$  и фактической площади контакта  $a$  на разных уровнях деформации

Радиус верхней части выступа определим из выражения

$$R = \frac{(2r')^2}{8\delta}. \quad (2)$$

Площадь основания недеформированной сферы (срез выступа на уровне  $\delta$ ):

$$a' = \pi(r')^2 = 2\pi r^2 = 2a.$$

Тогда можно записать, что

$$(2r')^2 = 4a'/\pi. \quad (3)$$

Учитывая особенности структуры фрактальной кривой, запишем

$$\delta = G^{D-1}(2r')^{2-D}. \quad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в уравнение (2), получим

$$R = \frac{a^{D/2}}{\pi^{D/2} 2^{(3-D/2)} G^{D-1}}. \quad (5)$$

Предлагаемый подход качественно не противоречит модели Маджумдара – Бхушана, и радиус скругления верхней части выступа неровности, в отличие от модели Гринвуда – Вильямсона [3], не является постоянным.

### КРИТИЧЕСКАЯ ПЛОЩАДЬ ПЯТНА КОНТАКТА И КРИТЕРИЙ ПЕРЕХОДА МЕЖДУ ЕГО СОСТОЯНИЯМИ

Маджумдар и Бхушан считают, что «меньшие пятна контакта имеют меньшие радиусы закругления микронеровностей, поэтому более вероятно, что микровыступы подвергнутся пластической деформации» [4, 5]. С целью упрощения задачи полагаем

только два состояния контакта – упругое и пластическое. Соотношение (по Герцу) между нагрузкой  $F$  и площадью пятна контакта  $a$  имеет вид:

для упругого контакта с учетом того, что  $a' = 2a$ :

$$F_e^0 = \frac{4}{3} ER^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} = \frac{4Ea^{\frac{3}{2}}}{3\pi^{\frac{3}{2}}R}; \quad \frac{1}{E} = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2},$$

где  $E_1, E_2, \mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона и модули упругости сопряженных поверхностей;

для пластического контакта:

$$F_p^0 = Ha'; \quad H = \min\{H_1, H_2\},$$

где  $H$  – твердость.

Подставив в соотношение для упругого контакта радиус, выражаемый уравнением (5), получим

$$F_e^0 = \frac{E}{3} \frac{a'^{(3-D)/2} 2^{(7-D)/2}}{\pi^{(3-D)/2}} G^{(D-1)}.$$

Тогда критерий перехода определяется на основе равенства  $F_e^0 = F_p^0$ . Если приравнять нагрузки в упругом и пластическом состояниях контакта, то после преобразования можно выразить критическую величину площади пятна контакта:

$$a_{c1} = \left( \frac{E}{H} \frac{2^{(7-D)/2}}{3\pi^{(3-D)/2}} \right)^{\frac{2}{(D-1)}} G^2. \quad (6)$$

### КОНТАКТНАЯ ЖЕСТКОСТЬ ВЫСТУПА

Нормальная контактная жесткость выступа в упругом состоянии определяется выражением

$$k_{Ne} = \frac{dF_e^0}{d\delta}.$$

Выразим нагрузку на выступ, учитывая выражение (2) и соотношение  $a' = 2\pi R\delta$ , следующим образом:

$$F_e^0 = \frac{4E}{3} \left[ \frac{(2\pi)^{D/2}}{8G^{(D-1)}} \right]^{\frac{1}{2-D}} \delta^{\left(\frac{3-D}{2-D}\right)}.$$

Тогда

$$k_{Ne} = \frac{4E}{3} \left( \frac{3-D}{2-D} \right) \left[ \frac{(2\pi)^{D/2}}{8G^{(D-1)}} \right]^{\frac{1}{2-D}} \delta^{\left(\frac{1}{2-D}\right)}.$$

С учетом выражения (4) и того, что  $a' = \frac{\pi}{4} (2r')^2$ , можно записать

$$k_{Ne} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} E \left( \frac{3-D}{2-D} \right) \left[ \frac{(2\pi)^{D/2}}{8} \right]^{\frac{1}{2-D}} a'^{(1/2)}. \quad (7)$$

Известно, что между нормальной и тангенциальной контактной жесткостью имеется функциональная зависимость [5, 7, 8], связанная с коэффициентом Пуассона  $\mu$ , в виде

$$\frac{k_T}{k_N} = \chi \Phi(\mu), \quad (8)$$

где  $0,5 \leq \chi \leq 2,0$ , а  $\Phi(\mu) = (1 - \mu)/(2 - \mu)$ .

### МНОЖЕСТВЕННЫЙ КОНТАКТ

Размерное распределение площадей среза выступов определяется по формуле, приведенной в [2, 6]:

$$n_t(a') = \frac{D}{2} a'_L{}^{(D/2)} a'^{-\left[\frac{D+2}{2}\right]},$$

где  $a'$  – площадь среза недеформированной неровности (для упругого контакта  $a' = 2a$ , для пластического  $a' = a$ );  $a_L$  – максимальная площадь среза неровности.

Количество площадей среза, лежащих между  $a'$  и  $a' + da'$ , равно  $n(a')da$ . Распределение площадей фактических пятен упругого контакта, отличающихся от площадей среза, примем в соответствии с [9] в виде

$$n(a') = \frac{D}{2} a'_L{}^{(D/2)} \psi^{-(1-D/2)} a'^{-\left[\frac{D+2}{2}\right]}, \quad (9)$$

где  $\psi = 6,62D^{-0.84}$ .

Нормальная контактная жесткость оценивается выражением

$$\begin{aligned} K_{Ne} &= \int_{a_{c1}}^{a'_L} k_{Ne} n(a') da' = \int_{a_c}^{a'_L} \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} E \left( \frac{3-D}{2-D} \right) a'^{\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{D}{2} a'_L{}^{\left(\frac{D}{2}\right)} a'^{-\left[\frac{D+2}{2}\right]} da' = \\ &= \frac{8DE}{3\sqrt{2\pi}} \frac{(3-D) \left( a'_L{}^{\frac{1}{2}} - a_{c1}{}^{\frac{(1-D)}{2}} a'_L{}^{\frac{D}{2}} \right)}{(2-D)(1-D) \psi^{\left(1-\frac{D}{2}\right)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом соотношения между касательной и нормальной жесткостью, приведенной в работе [7], запишем:

$$K_T = \frac{\pi(1-\mu)}{2(2-\mu)} K_N.$$

Представим зависимость нормальной нагрузки на плоский стык от площади максимального пятна контакта. Если максимальная площадь пятна не превышает  $a \leq a_c$ , то

$$F_p = \int_0^{a_{c1}} H a' \frac{D}{2} a'_{c1}{}^{\left(\frac{D}{2}\right)} a'^{-\left[\frac{D+2}{2}\right]} da' = \frac{H D a_{c1}}{(2-D)}, \quad 0 < a \leq a_c.$$

Нагрузка, воспринимаемая упругодеформированными выступами шероховатой поверхности, определяется соотношением

$$\begin{aligned}
 F_e &= \int_{a_{c1}}^{a'_L} \frac{E}{3} a^{\frac{(3-D)}{2}} 2^{\frac{(7-D)}{2}} G^{(D-1)} \frac{D}{2\psi^{(1-\frac{D}{2})}} a_L^{\frac{(D)}{2}} a'^{\left[-\frac{(D+2)}{2}\right]} da' = \\
 &= \frac{E}{3} \frac{2^{\frac{(7-D)}{2}}}{\pi^{\frac{(3-D)}{2}}} G^{(D-1)} \frac{D}{2\psi^{(1-\frac{D}{2})}} a_L^{\frac{(D)}{2}} \int_{a_c}^{a'_L} a'^{\frac{(5-2D)}{2}} da' = \\
 &= \frac{E}{3} \frac{a^{\frac{(3-D)}{2}} 2^{\frac{(6-D)}{2}}}{\pi^{\frac{(3-D)}{2}} (3-2D)} G^{(D-1)} \frac{D}{2\psi^{(1-\frac{D}{2})}} \left( a_L^{\frac{(3-D)}{2}} - a_L^{\frac{(D)}{2}} a_{c1}^{\frac{(3-2D)}{2}} \right), \\
 & \quad D \neq 1,5.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Приведенная формула справедлива при  $a_{c1} \leq a \leq a'_L$ ,  $D < 1,5$ .  
Если фрактальная размерность  $D > 1,5$ , то, следуя [10]:

$$F_e = \frac{2E}{\pi^{3/4} \psi^{1/4}} \sqrt{G} (a'_L)^{3/4} \ln \left[ \frac{a'_L}{a_{c1}} \right].$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Расчеты были выполнены для шлифованных поверхностей со следующими параметрами:  $D = 1,531$ ;  $G = 6,768 \cdot 10^{-6}$  мм;  $H = 3\,000$  МПа;  $E = 10^5$  МПа. Используя формулу (7), имеем  $a_{c1} = 1,552 \cdot 10^{-6}$  мм<sup>2</sup>. Тогда  $F_p = 0,015$  Н. На рис. 2 представлена зависимость контактной жесткости от номинального давления. Эта зависимость носит линейный характер, что согласуется с данными, приведенными в статье [11].

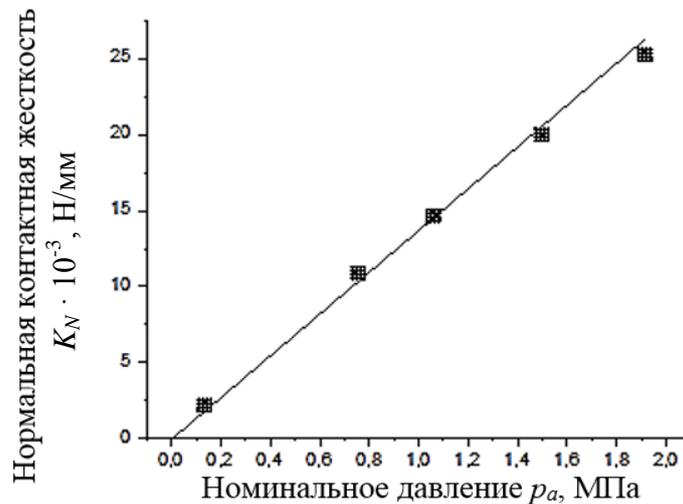


Рис. 2. Зависимость нормальной контактной жесткости от номинального давления

Численная оценка нормальной нагрузки, приложенной к плоскому стыку, показала малую долю вклада пластически деформированных выступов. Численное значение контактной жесткости при давлении  $p_a = 1,06$  МПа составило  $K_N = 1,461 \cdot 10^4$  Н/мм. С учетом соотношения (8) можно сделать вывод, что

тангенциальная контактная жесткость также носит линейный характер в зависимости от номинального давления.

Используя приведенные в настоящей работе зависимости, найдем аналитическую зависимость между сближением (мкм) и нагрузкой (Н) на фрактальную поверхность, которая характеризуется выражением

$$\delta = 0,29F_e^{0,23}. \quad (12)$$

Связь между площадью максимального пятна контакта и сближением

$$\delta = \left(\frac{a'_L}{\pi}\right)^{1-D/2} 2^{\frac{3-D}{2}} G^{D-1}.$$

Подобная зависимость, основанная на экспериментальных данных для шлифованной поверхности, имеющей высоту сглаживания  $R_p = 2,4$  мкм и радиус верхней части выступов 60 мкм, приведена в статье [12]:

$$\delta = 0,20F_e^{0,29}.$$

Сравнение этих зависимостей показывает их близкое соответствие, что позволяет оценить корректность предлагаемого в настоящей работе подхода. На рис. 3 представлена зависимость сближения от номинального давления при различных размерах площадок номинального контакта.

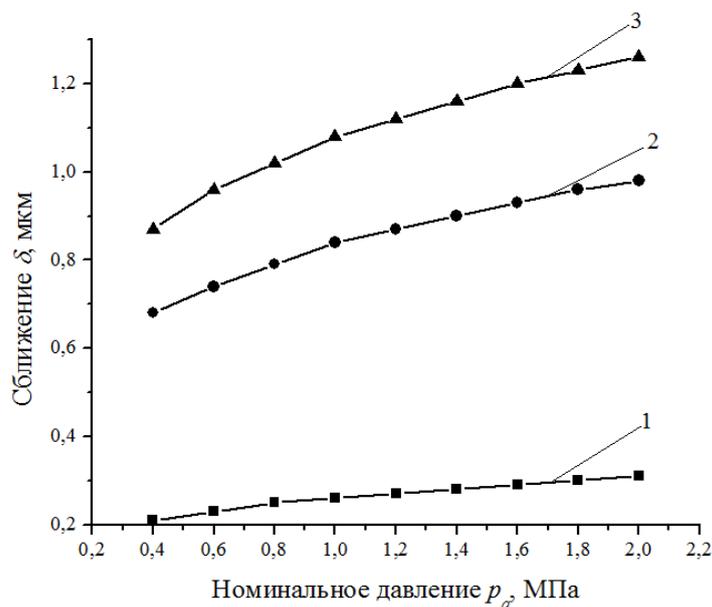


Рис. 3. Зависимость сближения от номинального давления:  
1 – номинальная площадь контакта  $A_a = 0,64$  мм<sup>2</sup>; 2 – 100 мм<sup>2</sup>; 3 – 300 мм<sup>2</sup>

Предложенная модель контактного взаимодействия является корректной при условии, что по мере роста сжимающей нагрузки имеет место пластическая деформация неровностей, которая с ростом нагрузки переходит в упругую, а затем в пластическую. Критерий второго перехода найдем из выражения [13]:

$$a'_{c2} = 2,4\pi \left[ 2^{(2-D)} \left( \frac{E}{H} \right)^2 \right]^{\frac{1}{D-1}} G^2.$$

Для представленного выше примера критическая площадь выступа  $a'_{c2} = 3,468 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^2$  ( $a'_{c2} = 223 a_{c1}$ ).

Номинальное давление, при котором предлагаемая модель является корректной (для данных фрактальных параметров поверхности), не должно превышать  $p_a \leq 3,22 \text{ МПа}$ . При  $a'_L \geq a'_{c2}$  нагрузка, воспринимаемая пластически деформированными выступами (пластически насыщенный (по Н.М. Михину) контакт), определяется выражением

$$F_p = \int_{a'_{c2}}^{a'_L} H a' \frac{D}{2} a'_L \left( \frac{D}{2} \right) a'^{-\left(\frac{D+2}{2}\right)} da' = \frac{HD}{(2-D)} \left( a'_L - a'^{D/2}_L a'_{c2} \right)^{1-D/2}.$$

При этом фактическая площадь контакта

$$A_r = F_p / H.$$

## ВЫВОДЫ

Основные результаты работы можно представить в виде пунктов:

1. Величина нормальных деформаций контакта (сближение контактирующих поверхностей) нелинейно зависит от величины нормальной (сжимающей) нагрузки в диапазоне рассматриваемых значений (см. формулу (12)).

2. Нормальная контактная жесткость не является постоянной величиной и зависит от структуры сопряженных поверхностей и величины сжимающей силы (см. рис. 2). Тангенциальная жесткость контакта зависит от нормальной жесткости и коэффициента Пуассона.

3. Отношение величин тангенциальной и нормальной контактной жесткости стальных плоских стыков шероховатых поверхностей не зависит от нагрузки и равно 0,647 в рамках приведенной методики расчета. Экспериментальные данные (по В.В. Измайлову) показывают, что это отношение для плоского стыка составляет примерно 0,625...0,909.

4. На величины нормальной и тангенциальной жесткостей плоских стыков шероховатых поверхностей влияет фрактальная форма выступов шероховатости. Обеспечение высоких значений нормальной контактной жесткости способствует, в частности, повышению долговечности болтов фланцевых соединений.

Предложенный подход дает возможность обоснованно выбрать технологический способ обработки контактирующих поверхностей, обеспечивающий требуемые функциональные характеристики сопряжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Majumdar A., Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces // *Journal of Tribology*. 1990. V. 112 (2). P. 205–216.
2. Majumdar A., Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces // *Journal of Tribology*. 1991. V. 113(1). P. 1–11.
3. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces // *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*. 1966. V. 295. № 1442. P. 300–319.

4. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *Journal of Applied Mechanics*. 1949. V. 71. P. 259–268.
5. Raffa M.L., Lebon F., Vairo G. Normal and tangential stiffnesses of rough surfaces in contact via an imperfect interface model // *International Journal of solids and structures*. 2016. V. 87. P. 245–253.
6. Xu K., Yuan Y., Chen J. The effects of size distribution functions on contact between fractal rough surfaces // *AIP Advances*. 2018. V. 8. № 7. P. 075317.
7. Sherif H.A., Kossa S.S. Relationship between normal and tangential contact stiffness of nominally flat surfaces // *Wear*. 1991. V. 151. P. 49–62.
8. Yoshioka N., Scholz C.H. Elastic properties of contacting surfaces under normal and shear loads: 1. Theory // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1989. V. 94. № B12. P. 17681–17690.
9. Filippi S., Akay A., Gola M.M. Measurement of tangential contact hysteresis during microslip // *Journal of Tribology*. 2004. V. 126. № 3. P. 482–489.
10. Zhao Y., Yang C., Cai L., Shi W., Hong Y. Stiffness and damping model of bolted joints with uneven surface contact pressure distribution // *Strojniski Vestnik. Journal of Mechanical Engineering*. 2016. V. 62. № 11. P. 665–677.
11. Gong Y., Shen J., Liu W., Chen L. Fractal characteristics of mechanical interface contact parameters // *MATEC Web of Conferences*. – *EDP Sciences*. 2018. V. 175. P. 03009.
12. Измайлов В.В., Левыкин Д.А. Нормальная и касательная жесткости плоского стыка шероховатых поверхностей // *Механика и физика процессов на поверхности и в контакте твердых тел, деталей технологического и энергетического оборудования*. 2012. № 5. С. 4–11.
13. Михин Н.М. Внешнее трение твердых тел. М.: Наука. 1977. 221 с.

**Для цитирования:** Измеров М.А., Тихомиров В.П. Нормальная и касательная жесткость плоского стыка фрактальных поверхностей // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2022. № 2 (14). С. 21–29.

## **NORMAL AND TANGENTIAL STIFFNESS OF A FLAT JOINT OF FRACTAL SURFACES**

M.A. IZMEROV, Cand. Sc., V.P. TIKHOMIROV, Dr Sc.

Bryansk State Technical University, 7, 50 years of October Blvd., 241035, Bryansk,  
Russian Federation, e-mail: m.izmerov@yandex.ru

In paper a fractal roughness description model and a contact interaction model for engineering surfaces are proposed. The results describing the normal and tangential stiffness of a flat joint are obtained. A comparison with the literature experimental data of other studies is made.

*Keywords:* roughness, roughness parameters, stiffness, geometric modeling, mathematical models.

## REFERENCES

1. Majumdar A., Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces. *Journal of Tribology*. 1990. V. 112 (2), pp. 205–216.
2. Majumdar A., Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces. *Journal of Tribology*. 1991. V. 113 (1), pp. 1–11.
3. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*. 1966. V. 295. No. 1442, pp. 300–319.
4. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*. 1949. V. 71, pp. 259–268.
5. Raffa M.L., Lebon F., Vairo G. Normal and tangential stiffnesses of rough surfaces in contact via an imperfect interface model. *International Journal of solids and structures*. 2016. V. 87, pp. 245–253.
6. Xu K., Yuan Y., Chen J. The effects of size distribution functions on contact between fractal rough surfaces. *AIP Advances*. 2018. V. 8. No. 7. P. 075317.
7. Sherif H.A., Kossa S.S. Relationship between normal and tangential contact stiffness of nominally flat surfaces. *Wear*. 1991. V. 151, pp. 49–62.
8. Yoshioka N., Scholz C.H. Elastic properties of contacting surfaces under normal and shear loads: 1. Theory. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1989. V. 94. No. B12, pp. 17681–17690.
9. Filippi S., Akay A., Gola M.M. Measurement of tangential contact hysteresis during microslip. *Journal of Tribology*. 2004. V. 126. No. 3, pp. 482–489.
10. Zhao Y., Yang C., Cai L., Shi W., Hong Y. Stiffness and damping model of bolted joints with uneven surface contact pressure distribution. *Strojniski Vestnik. Journal of Mechanical Engineering*. 2016. V. 62. No. 11, pp. 665–677.
11. Gong Y., Shen J., Liu W., Chen L. Fractal characteristics of mechanical interface contact parameters. *MATEC Web of Conferences. – EDP Sciences*. 2018. V. 175. P. 03009.
12. Izmailov V.V., Levykin D.A. Normal and tangential rigidity of a flat joint of rough surfaces. *Mekhanika i fizika protsessov na poverkhnosti i v kontakte tverdykh tel, detaley tekhnologicheskogo i energeticheskogo oborudovaniya*. 2012. No. 5, pp. 4–11.
13. Mikhlin N.M. *Vneshneye treniye tverdykh tel* [External friction of solids]. Moscow: Nauka. 1977. 221 p.

Поступила в редакцию/received: 17.01.2022; после рецензирования/revised: 27.01.2022;  
принята/accepted: 04.02.2022