

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 681.5.011

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ ИЗ ЗАКРИТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

А.Н. БОЛОТОВ, д-р техн. наук, Г.Б. БУРДО, д-р техн. наук

Тверской государственной технической университет,
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: gbtms@yandex.ru

© Болотов А.Н., Бурдо Г.Б., 2022

Целенаправленное конструирование систем с магнитоинертными подшипниками затруднено отсутствием теоретических методик расчета оптимальных магнитных систем, учитывающих физические особенности свойств высококоэрцитивных магнитов. В работе решена задача расчета силы магнитостатического взаимодействия между двумя постоянными цилиндрическими и кольцевыми магнитами. Рассмотрены материалы магнитов типа Р-Со, Fe-B, которые имеют близкую к прямоугольной кривую размагничивания и достаточно высокие значения коэрцитивной силы. Использована гипотеза Ампера, согласно которой постоянные магниты представлены в виде эквивалентных им соленоидов. Кольцевые магниты эквивалентны системе из двух коаксиальных соленоидов, имеющих противоположное направление тока в обмотках. Получены аналитические выражения для расчета нормальной и тангенциальной сил взаимодействия постоянных магнитов. Модель можно применить для определения критериев подобия магнитных систем подшипников, расчета оптимальных размеров постоянных магнитов, грузоподъемности и жесткости магнитных подшипников.

Ключевые слова: магнитное поле, конструирование, магнитоинертные подшипники, магнитостатическое взаимодействие.

DOI: 10.46573/2658-5030-2022-2-69-76

ВВЕДЕНИЕ

Магнитоинертным подшипникам уделяют большое внимание, особенно после создания новых высокоэнергоемких магнитов на основе редкоземельных элементов [1–4]. Тем не менее до сих пор их конструирование осуществляется без опоры на теоретические и экспериментальные исследования, в расчете на интуицию, в результате чего такие умозрительные конструкции зачастую почти не пригодны. Для широкого и разнообразного применения подшипников требуются данные по их расчету и функциональным свойствам. Необходимы рекомендации по оптимизации конструкции, геометрических параметров, выбору материалов и т. д.

В первую очередь для практического применения инертных магнитных подшипников важно разработать достаточно точную и в то же время простую методику расчета оптимальной магнитной системы, учитывающей все физические особенности свойств высококоэрцитивных магнитов [5]. Для решения этой задачи в общем виде сначала необходимо рассчитать силу магнитостатического взаимодействия между двумя постоянными магнитами, составляющими часть любого радиального и упорного

подшипника. Зная эту силу, можно определить все магнитосиловые характеристики подшипников: грузоподъемность, жесткость, дестабилизирующие силы.

Цель работы заключалась в получении аналитического выражения, описывающего магнитостатическое взаимодействие осесимметричных магнитов.

РАСЧЕТ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МАГНИТОВ

Рассчитаем силу магнитостатического взаимодействия двух цилиндрических магнитов, намагниченных вдоль оси (рис. 1).

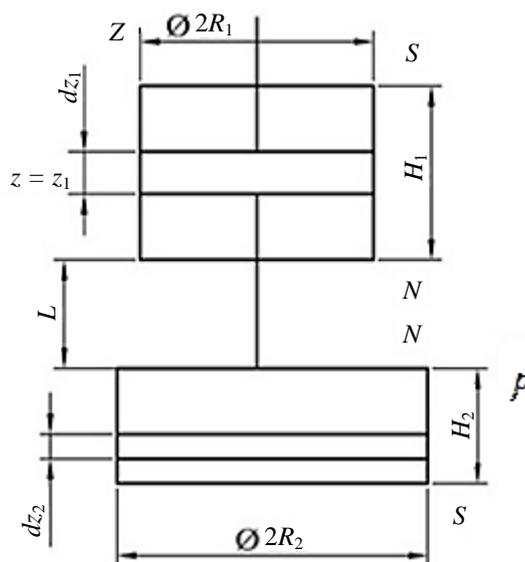


Рис. 1. К определению силы магнитостатического взаимодействия магнитов

Пусть магниты расположены соосно и не имеют вблизи элементов из магнитомягких материалов, изменяющих распределение полей. Чтобы точно рассчитать силу взаимодействия, нужно знать характер распределения намагниченности J по объему магнитов. Намагниченность J зависит от свойств магнитов и воздействующих на него собственного H_e и внешнего H_o размагничивающих полей (в зависимости от направления намагниченности H_o может иметь различный знак).

Известно [5], что рассматриваемые материалы магнитов типа Р-Со, Fe-В имеют близкую к прямоугольной кривую размагничивания (рис. 2) и достаточно высокие значения коэрцитивной силы JH_c и поля kH_c , выше которого происходит постепенное уменьшение намагниченности.

Магнитное состояние магнита характеризуется точкой А на кривой размагничивания, называемой рабочей точкой. Положение рабочей точки зависит от величины размагничивающего поля H_e и внешнего магнитного H_o поля, создаваемого сопряженным магнитом. В большинстве практически значимых конструкций подшипников суммарное размагничивающее поле $H_e \pm H_o$ не достигает поля kH_c , т. е. рабочая точка магнитов остается на горизонтальном участке кривой размагничивания, и исходная остаточная намагниченность Jr не изменяется.

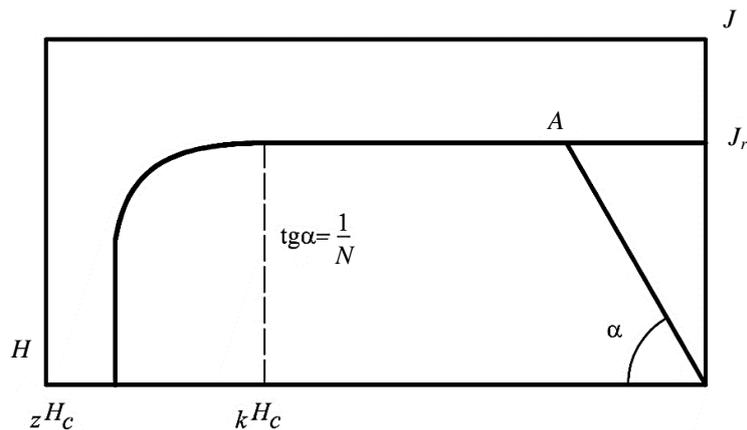


Рис. 2. Характерная кривая размагничивания SmCo магнитов

Если намагниченность магнитов полагать однородной и анизотропной, то основой расчетов удобно считать гипотезу Ампера, согласно которой постоянные магниты можно представить в виде равных им по размерам соленоидов с однослойными и очень тонкими обмотками, по которым протекают токи с постоянной плотностью, равной остаточным намагниченностям магнитов [6–10]. Радиальная сила взаимодействия соленоидов равна нулю. Для нахождения нормальной силы взаимодействия вырежем у каждого из соленоидов по кольцу высотой dz_1 и dz_2 . По этим кольцам протекают токи $i_1 = J_1 dz_1$ и $i_2 = J_2 dz_2$. Допустим, что токи противоположно направлены (случай отталкивания). Согласно закону Ампера, они будут взаимодействовать с силой f_z :

$$f_z = i_1 \oint [d\vec{l} \times \vec{B}_2] = J_1 \oint_L^{L+H_1} [d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2] dz_1, \quad (1)$$

где $d\vec{l}_1$ – элемент тока первого кольца; \vec{B}_2 – поле второго кольца.

Очевидно, что сила взаимодействия соленоидов

$$F_z = J_1 \oint_{-H_2}^0 \int_L^{L+H_1} [d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2] dz_1 dz_2.$$

Найдем поле, создаваемое вторым кольцом. Для удобства расчеты будем проводить в цилиндрической системе координат. Начало координат поместим в центр верхней торцевой поверхности нижнего соленоида (см. рис. 1). Вектор магнитной индукции находится из соотношения

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A},$$

где \vec{A} – вектор-потенциал магнитного поля.

Вектор-потенциал можно вычислить по формуле

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} dV}{r},$$

где $\vec{\delta}$ – плотность тока; r – расстояние от центра элемента объема dV до точки, в которой определяется вектор-потенциал.

Так как по условию поперечный размер кольца с током малы в сравнении с длиной кольца и расстоянием до точки, где определяется вектор-потенциал, то

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i_2 d\vec{l}_2}{r}.$$

Вследствие осевой симметрии соленоида вектор-потенциал будет иметь единственную составляющую A_α :

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint \frac{\cos \alpha dl_2}{r}.$$

Так как

$$r = \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + R_2^2 + \rho^2 - 2R_2\rho \cos \alpha}, \quad dl = R_2 d\alpha,$$

то

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 i_2 l_2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + R_2^2 - 2R_2\rho \cos \alpha}}.$$

Положим: $\alpha = \pi - 2\beta$; $d\alpha = -2d\beta$; $a^2 = \frac{4R_2\rho}{(z_1 - z_2)^2 + (R_2 + \rho)^2}$.

Имеем: $\cos \alpha = -\cos 2\beta = 2\sin^2 \beta - 1$;

$$r = \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + R_2^2 + \rho^2 - 4R_2\rho \sin^2 \beta + 2R_2\rho} = \frac{2\sqrt{R_2\rho}}{a} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \beta}.$$

Следовательно:

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} \sqrt{\frac{R_2}{\rho}} a \int_0^{\pi/2} \frac{(2\sin^2 \beta - 1)d\beta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \beta}}.$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{2\sin^2 \beta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \beta}} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2 - a}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \beta}} - 2\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \beta} \right),$$

можно написать, что

$$A_\alpha = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} \sqrt{\frac{R_2}{\rho}} \left[\left(\frac{2}{a} - a \right) E - \frac{2}{a} N \right],$$

где $E = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \beta}}$ и $N = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \beta} d\beta$ представляют собой полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Отметим, что число a лежит в пределах $0 < a < 1$. При значении $a = 1$, т. е. на оси контура с током, вектор-потенциал \vec{A} обращается в бесконечность, но, как было указано выше, принятая упрощенная формула для вычисления величины \vec{A} может быть использована только на достаточном расстоянии от проводника.

Вектор магнитной индукции имеет только две составляющие (B_z и B_ρ), которые находятся из выражений:

$$\begin{aligned} B_z &= \text{rot}_z \vec{A}; B_\rho = \text{rot}_\rho \vec{A} \text{ или } B_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_\alpha) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_z) = \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}; \\ B_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\alpha) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\alpha) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\alpha); \\ B_\alpha &= \frac{\partial}{\partial z} (A_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} (A_z) = 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{N}{a(1-a^2)} - \frac{E}{a}; \frac{\partial N}{\partial a} = \frac{N}{a} - \frac{E}{a},$$

а также, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial (z_1 - z_2)} &= -\frac{(z_1 - z_2)a^2}{4R_2\rho}; \\ \frac{\partial a}{\partial \rho} &= \frac{a}{2\rho} - \frac{a^2}{4\rho} - \frac{a^3}{4R_2}. \end{aligned}$$

После несложных вычислений составляющие вектора магнитной индукции можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\rho} \frac{z_1 - z_2}{[(R_2 + \rho)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}} \left[-E + \frac{R_2^2 + \rho^2 + (z_1 - z_2)^2}{(R_2 - \rho)^2 + (z_1 - z_2)^2} N \right]; \\ B_z &= \frac{\mu_0 i_2}{2\pi[(R_2 + \rho)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}} \left[E + \frac{R_2^2 + \rho^2 + (z_1 - z_2)^2}{(R_2 - \rho)^2 + (z_1 - z_2)^2} N \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, что $dl_1 = \rho d\phi = R_1 d\phi$, и раскрывая векторное произведение в формуле (1), получим максимальную силу магнитостатического взаимодействия соленоидов (а значит, и магнитов):

$$\begin{aligned} F_z &= J_2 \int_{-H_2}^0 \int_L^{L+H_1} \int_0^{2\pi} R_1 B_\rho d\phi dz_1 dz_2 = \mu_0 J_1 J_2 \int_{-H_2}^0 \int_L^{L+H_1} \frac{(z_1 - z_2)}{[(R_1 + R_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}} \times \\ &\times \left[-E + \frac{R_2^2 + R_2^2 + (z_1 + z_2)^2}{(R_1 - R_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} N \right] dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим следующий случай: соленоиды расположены не соосно, верхний магнит сдвинут на расстояние s от оси, проходящей через центр второго магнита. Тогда суммарная сила, действующая на каждый магнит, будет иметь две составляющие (F_z и F_ρ):

$$\begin{aligned} F_z &= J_2 \oint_{l_1} \int_{-H_2}^0 \int_L^{L+H_1} B_\rho \sin \gamma dl_1 dz_1 dz_2; \\ F_\rho &= J_2 \oint_{l_2} \int_{H_2}^0 \int_L^{L+H_2} B_z \cos \phi dl_1 dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

Полярный радиус ρ , входящий в выражение для вычисления магнитной индукции (dl_1 и $\sin \gamma$), можно выразить следующим образом:

$$\rho^2 = R_1^2 + c^2 - 2R_1c \cos \phi;$$

$$\sin \gamma = \frac{R_1 - c \cos \phi}{\rho}; dl_1 = R_1 d\phi.$$

После подстановки получим:

$$F_z = \frac{\mu_0 J_1 J_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-H_2}^0 \int_L^{L+H_1} \frac{R_1(R_1 - c \cos \phi)(z_1 - z_2)}{\rho^2 [(R_2 + \rho)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}} \times$$

$$\times \left[-E + \frac{R_2^2 + \rho^2 + (z_1 - z_2)^2}{(R_2 - \rho)^2 + (z_1 - z_2)^2} N \right] d\phi dz_1 dz_2; \quad (4)$$

$$F_\rho = \frac{\mu_0 J_1 J_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-H_2}^0 \int_L^{L+H_1} \frac{R_1 \cos \phi}{[(R_2 + \rho)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}} \times$$

$$\times \left[E + \frac{R_2^2 - \rho^2 - (z_1 - z_2)^2}{(R_2 - \rho)^2 + (z_1 - z_2)^2} N \right] d\phi dz_1 dz_2. \quad (5)$$

Формулы (4), (5) позволяют рассчитать несущую способность, жесткость и дестабилизирующие силы подшипников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено магнитостатическое взаимодействие высококоэрцитивных редкоземельных магнитов с однородной остаточной намагничённостью. На основе метода эквивалентного соленоида получены аналитические выражения (4), (5) для расчета нормальной и тангенциальной сил взаимодействия цилиндрических постоянных магнитов. Аналогичный подход можно использовать для расчета магнитостатического взаимодействия кольцевых магнитов с учетом принципа суперпозиции магнитных полей. Приведенные формулы позволяют рассчитывать не только пассивные магнитные подшипники, но и другие магнитосиловые устройства, например магнитные пружины, амортизаторы, удерживающие приспособления, магнитные уплотнения и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fillion G., Ruel J., Dubois M.R. Reduced-friction passive magnetic bearing: innovative design and novel characterization technique // *Machines*. 2013. V. 1. № 3. P. 98–115.
2. Falkowski K., Henzel M. High efficiency radial passive magnetic bearing // *Solid State Phenomena*. 2010. V. 164. P. 360–365.
3. Болотов А.Н., Новиков В.В., Павлов В.Г. Магнитожидкостные подшипники скольжения // *Трение и износ*. 2004. Т. 26. № 3. С. 286–289.
4. Yonnet J.P. Passive magnetic bearings with permanent magnets // *IEEE Transactions on magnetics*. 1978. V. 14. № 5. С. 803–805.

5. Тишин А.М. Перспективы применения редкоземельных постоянных магнитов в электроприводах специального назначения. К 100-летию использования постоянных магнитов в технике // *Инноватика и экспертиза: научные труды*. 2017. № 1 (19). С. 175–192.

6. Слесарев Ю.Н., Малышев Б.В., Борисова А.А., Воронцов А.А. Математическое моделирование магнитных полей постоянных магнитов цилиндрической формы и эквивалентных им соленоидов // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2016. № 4 (20). С. 150–157.

7. Liang M., Xue K. Calculation of the magnetic field of the finite solenoid with a rectangular cross section // *Phys. Eng.* 2018. V. 28. P. 57–61.

8. Ravaud R., Lemarquand G., Lemarquand V., Depollier C. Discussion about the analytical calculation of the magnetic field created by permanent magnets // *Progress in Electromagnetics Research B*. 2009. V. 11. P. 281–297.

9. Camacho J.M., Sosa V. Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry // *Revista mexicana de fisica E*. 2013. V. 59. № 1. P. 8–17.

Для цитирования: Болотов А.Н., Бурдо Г.Б. Аналитическое моделирование взаимодействия постоянных магнитов из закритических материалов // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2022. № 2 (14). С. 69–76.

ANALYTICAL MODELING OF THE INTERACTION OF PERMANENT MAGNETS MADE OF SUPERCRITICAL MATERIALS

A.N. BOLOTOV, Dr. Sc., G.B. BURDO, Dr. Sc.

Tver State Technical University, 22, Af. Nikitin emb., 170026, Tver,
Russian Federation, e-mail: gbtms@yandex.ru

The purposeful design of systems with magnetic-passive bearings is complicated by the lack of theoretical methods for calculating optimal magnetic systems that take into account the physical characteristics of the properties of high-coercive magnets. The paper solves the problem of calculating the force of magnetostatic interaction between two permanent cylindrical and annular magnets. The materials of magnets of the P-Co type, Fe-B, which have a demagnetization curve close to a rectangular one and sufficiently high values of coercive force, are considered. The Ampere hypothesis is used, according to which permanent magnets are represented in the form of solenoids equivalent to them. Ring magnets are equivalent to a system of two coaxial solenoids having the opposite direction of current in the windings. Analytical expressions for calculating the normal and tangential interaction forces of permanent magnets are obtained. The model can be used to determine the similarity criteria of magnetic bearing systems, calculate the optimal dimensions of permanent magnets, load capacity and stiffness of magnetic bearings.

Keywords: magnetic field, design, magnetic-passive bearings, magnetostatic interaction.

REFERENCES

1. Fllion G., Ruel J., Dubois M.R. Reduced-friction passive magnetic bearing: innovative design and novel characterization technique. *Machines*. 2013. V. 1. No. 3, pp. 98–115.
2. Falkowski K., Henzel M. High efficiency radial passive magnetic bearing. *Solid State Phenomena*. 2010. V. 164, pp. 360–365.
3. Bolotov A.N., Novikov V.V., Pavlov V.G. Magnetic fluid plain bearings. *Treniye i iznos*. 2004. V. 26. No. 3, pp. 286–289. (In Russian).
4. Yonnet J.P. Passive magnetic bearings with permanent magnets. *IEEE Transactions on magnetics*. 1978. V. 14. No. 5, pp. 803–805.
5. Tishin A.M. Prospects for the use of rare-earth permanent magnets in special-purpose electric drives. To the 100th anniversary of the use of permanent magnets in technology. *Innovatika i ekspertiza: nauchnyye trudy*. 2017. No. 1 (19), pp. 175–192. (In Russian).
6. Slesarev Yu.N., Malyshev B.V., Borisova A.A., Vorontsov A.A. Mathematical modeling of magnetic fields of permanent cylindrical magnets and equivalent solenoids. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve*. 2016. No. 4 (20), pp. 150–157. (In Russian).
7. Liang M., Xue K. Calculation of the magnetic field of the finite solenoid with a rectangular cross section. *Phys. Eng.* 2018. V. 28, pp. 57–61.
8. Ravaud R., Lemarquand G., Lemarquand V., Depollier C. Discussion about the analytical calculation of the magnetic field created by permanent magnets. *Progress in Electromagnetics Research B*. 2009. V. 11, pp. 281–297.
9. Camacho J.M., Sosa V. Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista mexicana de fisica E*. 2013. V. 59. No. 1, pp. 8–17.

Поступила в редакцию/received: 23.01.2022; после рецензирования/revised: 28.01.2022;
принята/accepted: 04.02.2022