ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

УДК 517.938

О РЕКУРРЕНТНЫХ И ОБОБЩЕННО-РЕКУРРЕНТНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.М. ДЗЮБА, д.ф-м.н., И.И. ЕМЕЛЬЯНОВА, ст. препод.

Тверской государственный технический университет
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: sdzyuba@mail.ru

В статье приведено определение рекуррентного решения дифференциального уравнения с периодической по t правой частью $\vec{X}(x,t)$, заданной на прямом произведении $V \times R$ дифференцируемого (класса C^2) компактного многообразия V, расположенного в аффинном пространстве E над полем действительных чисел R, и множества R. Указана теорема существования таких решений. Данная теорема имеет ряд довольно важных применений. Именно для непериодических функций $t \to \vec{X}(x,t)$ введено определение обобщенно-рекуррентного решения и на основании теоремы существования рекуррентных решений установлено существование обобщенно-рекуррентных решений. Отмечено, что теорема существования обобщенно-рекуррентных решений является прямым и естественным развитием известных теорем о существовании асимптотических почти периодических и других устойчивых по Пуассону решений дифференциальных уравнений с соответствующей правой частью $\vec{X}(x,t)$.

Ключевые слова: гладкое компактное многообразие, дифференциальные уравнения, рекуррентные и обобщенно-рекуррентные решения.

DOI: 10.46573/2658-5030-2024-4-68-75

ВВЕДЕНИЕ

Еще со времен написания классической монографии [1] стало понятно, что дальнейшее развитие теории систем рано или поздно приведет к потребности трактования некоторых ее задач как задач общей теории динамических систем.

Основы общей теории динамических систем были заложены в начале XX века Дж. Биркгофом и собраны вместе в его знаменитой монографии [2]. Конечной целью этой теории «должно служить качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» [2, с. 194]. В настоящей работе предпринята попытка распространения некоторых положений данной теории на неавтономные уравнения.

Проиллюстрируем суть возникающей при этом проблемы.

Предположим, что V – дифференцируемое компактное многообразие размерности n в аффинном пространстве E размерности ν над полем действительных чисел R, принадлежащее классу C^2. Обозначим через $\vec{E}$ векторное пространство, присоединен-ное к E. Пусть для всех $x \in V$ в векторном пространстве $\vec{T}(x;V) \subset \vec{E}$, касательном к V в точке x, лежит вектор $\vec{X}(x)$ и пусть отображение $\vec{X}: V \to \vec{T}(x; V)$ принадлежит классу C^1.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \vec{X}(x). \tag{1}$$

Так как многообразие V компактно, то непродолжаемые решения уравнения (1) порождают на V динамическую систему G. Изучая движения системы G, Биркгоф установил, что *ω- и α-предельные множества любого движения этой системы всегда содержат рекуррентные движения* [2, с. 204].

Предположим теперь, что для всех $x \in V$ и $t \in R$ в пространстве $\vec{T}(x; V)$ лежит вектор $\vec{X}(x, t)$, пусть отображение $\vec{X}: V \times R \to \vec{T}(x; V)$ принадлежит классу C^1 при всех $t \in R$ и является линейчатым по t на R при всех $x \in V$, т.е. на каждой компактной части $I \subset R$ при всех $x \in V$ функция $t \to \vec{X}(x, t)$ является равномерным пределом некоторой последовательности ступенчатых функций [3, с. 204].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \vec{X}(x, t). \tag{2}$$

Если многообразие V компактно, то, действуя стандартным образом, несложно показать, что любое непродолжаемое решение $\xi(t, \xi_0, t_0)$ уравнения (2) с начальными значениями $(\xi_0, t_0) \in V \times R$ определено для всех $t \in R$ [3, с. 209; 4, с. 34].

Из всех уравнений вида (2) особое значение имеют уравнения с периодической правой частью [5, с. 99]. Таким образом, в дальнейшем (до тех пор, пока не будет оговорено противное) условимся считать, что

$$\overrightarrow{\quad X}(x, t+1) \equiv \vec{X}(x, t).$$

Многие свойства решений автономных уравнений, как известно, не переносятся на решения неавтономных уравнений. Так, в неавтономном случае можно говорить лишь о решениях, близких к рекуррентным в некотором подходящем смысле [6]. Вместе с тем в статье [7] достаточно полно описано взаимоотношение движений процессов, порожденных решениями уравнений вида (2) и некоторых других уравнений.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию результатов, полученных в статье [7]. Именно для уравнения (2) будут введены определения рекуррентного решения и обобщенно-рекуррентного решения, а также приведены теоремы существования этих решений.

УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Для простоты *везде в дальнейшем будем считать, что многообразие V компактно*. Кроме того, при исследовании рекуррентных решений *в дальнейшем мы будем интерпретировать V как полуметрическое пространство с отделимой структурой*.

Сначала зафиксируем произвольный атлас $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$ многообразия V, где Φ_s – некоторая открытая часть пространства R^n и φ_s – гомеоморфизм Φ_s на $V_s \subset V$. При этом, поскольку V компактно, можем считать, что число S конечно.

Далее напомним, что топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если топология в нем индуцирована направленным семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность [4, с. 456].

Напомним также, что функция $d_\gamma : \Gamma \times \Gamma \to$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(A) для всех $(p, q) \in \Gamma \times \Gamma$:

$$d_\gamma(p, q) = d_\gamma(q, p);$$

(B) для всех $p \in \Gamma$:

$$d_\gamma(p, p) = 0,$$

а случай

$$d_\gamma(p, q) = 0$$

не исключается при $q \neq p$;

(C) для всех $p \in \Gamma$, $q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p, q) \leq d_\gamma(p, r) + d_\gamma(r, q).$$

Наконец, напомним, что семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I}$ называется *направленным*, если для любой конечной части $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \geq d_j$ для всех $j \in J$. Если же для каждой пары $p \neq q$ найдется такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(p, q) > 0,$$

то будем говорить, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* [4, с. 456].

Заметим теперь, что многообразие V полуметризуемо как компактное топологическое пространство [4, с. 458]. Полуметрики на V определим следующим образом.

Зафиксируем некоторую точку $x \in V$, некоторую ее связную окрестность V_x и зададим непрерывную функцию $\gamma: V \to$, такую, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in V_x$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда равенство

$$d_\gamma(p, q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

дает полуметрику d_γ на V [4, с. 457].

Изменяя функцию γ, можно получать различные полуметрики d_γ. Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I_{V_x}}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ нашлась полуметрика d_γ, для которой $d_\gamma(p, q) > 0$. Проделав эту процедуру на всех связных окрестностях V_x всех точек $x \in V$, превратим V в полуметрическое пространство с отделимой структурой, в котором топология индуцирована семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$. Очевидно, что эта топология совпадает с исходной, введенной на V атласом $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$.

Сохранив все принятые выше допущения относительно отображения $\vec{X}$, введем следующее определение.

Определение 1. Пусть $\varphi(t)$ – непродолжаемое решение уравнения (2). Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число N_ε, что для всех $t \in R$

$$d_i\big(\varphi(t), \varphi(t + N_\varepsilon)\big) < \varepsilon, i \in I.$$

Тогда будем говорить, что $\varphi(t)$ – *рекуррентное решение*.

Очевидно, что если $\varphi(t)$ – рекуррентное (в смысле определения 1) решение, то найдется такая последовательность $(N_k)_{k \in N} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что

$$\lim_{k \to +\infty} d_i\big(\varphi(t + N_k), \varphi(t)\big) = 0, i \in I,$$

равномерно на всей оси R, и наоборот. Более того, при этом

$$\lim_{k \to +\infty} d_i\big(\varphi(t - N_k), \varphi(t)\big) = 0, i \in I,$$

равномерно на всей оси R.

Определение 1 отличается от классического определения рекуррентного решения, поэтому коротко остановимся на последнем.

Напомним, что множество $M \subset V$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами. При этом любое непродолжаемое решение уравнения (1), расположенное в компактном минимальном множестве, называется *рекуррентным* [2, с. 203].

Пусть $\varphi(t)$ – некоторое непродолжаемое решение уравнения (1) и

$$K = \{\varphi(t) : t \in R\}$$

является его траекторией. Биркгоф фактически доказал, что необходимое и достаточное условие рекуррентности решения $\varphi(t)$ состоит в том, что *для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $T_\varepsilon > 0$*, что для всех* $s \in R$ *дуга*

$$K_{S,T_\varepsilon} = \{\varphi(t) : t \in [S, S + T_\varepsilon]\}$$

траектории K *аппроксимирует всю траекторию* K *с точностью* ε*, т.е. при заданном* ε *и соответствующем ему* T_ε *для всех* $s \in R$ *и* $\tau \in R$ *найдется такое* $t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]$*, что*

$$d_i\big(\varphi(s), \varphi(t)\big) < \varepsilon, i \in I \quad [2, с. 203].$$

В наши дни данное утверждение часто принимают за определение рекуррентного решения [8, с. 402].

Если $\varphi(t)$ – рекуррентное решение, то замыкание $\overline{K}$ его траектории K представляет собой компактное минимальное множество. В случае неавтономного уравнения (2), как известно, траектории решений начинают пересекаться. Поэтому прямое перенесение определения рекуррентного решения на неавтономные уравнения невозможно. Однако в статье [7] было показано, что в случае уравнения (1) классическое (и, стало быть, современное) определение рекуррентного решения и определение 1 эквивалентны.

Существование рекуррентных (в смысле определения 1) решений уравнения (1.2) устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\xi(t)$ – непродолжаемое решение уравнения (2). Тогда из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in N} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in N} \uparrow +\infty$, что существуют рекуррентные решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) *равномерно на каждом отрезке* $[a,b] \subset R$:

$$\lim_{l\to+\infty} d_i\left(\xi\left(t+N_{k_l}\right),\varphi(t)\right)=0, i\in I \tag{3}$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i\left(\xi\left(t-N_{k_l}\right),\psi(t)\right)=0, i\in I; \tag{4}$$

(ii) *равномерно на всей оси* R:

$$\lim_{l\to+\infty} d_i\left(\varphi\left(t+N_{k_{l+1}}-N_{k_l}\right),\varphi(t)\right)=0, i\in I \tag{5}$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i\left(\psi\left(t-N_{k_{l+1}}+N_{k_l}\right),\psi(t)\right)=0, i\in I. \tag{6}$$

Теорема 1 непосредственно следует из теоремы 2.1 работы [7], поэтому ее доказательство здесь мы не приводим.

Замечание 1. Если функция $t \to \vec{X}(x,t)$ периодична с некоторым натуральным периодом N, то, очевидно, *для каждого непродолжаемого решения $\xi(t)$ уравнения (2) найдутся такие последовательность натуральных чисел $(N_{k_l})_{l\in N} \uparrow +\infty$ и рекуррентные (в смысле определения 1) решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, что выполнены условия уравнений* (3)–(6). Более того, наряду с (3)–(6) равномерно на всей оси R

$$\lim_{l\to+\infty} d_i\left(\varphi\left(t-N_{k_{l+1}}+N_{k_l}\right),\varphi(t)\right)=0, i\in I$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i\left(\psi\left(t+N_{k_{l+1}}-N_{k_l}\right),\psi(t)\right)=0, i\in I.$$

УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

В качестве одного из применений теоремы 1 изучим поведение решений уравнения (2) без предположения о периодичности отображения $\vec{X}$. Другими словами, предположим, что выполнены лишь следующие допущения:

(a) отображение $x \to \vec{X}(x,t)$ принадлежит классу C^1 при всех $t \in R$;
(b) $t \to \vec{X}(x,t)$ – отображение, линейчатое на R при всех $x \in V$.

Для простоты обозначений положим

$$\overrightarrow{X_N}(x,t) = \begin{cases} \vec{X}(x,t), & t \in (-N,N); \\ \overrightarrow{X_N}(x,t-N), & t \geq N; \\ \overrightarrow{X_N}(x,t+N), & t \leq -N, \end{cases} \tag{7}$$

где $N = 1,2,\dots$ и $x \in V$, и, наряду с уравнением (2), введем в рассмотрение последовательность уравнений

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \vec{X}_N(x,t), \tag{8}$$

каждое из которых периодично по t с периодом, равным N, причем все функции $\vec{X}_N$ принадлежат классу C^1 по x при всех $t \in R$ и являются линейчатыми по t на R при всех $x \in V$.

Многообразие V компактно, поэтому, очевидно, каждое непродолжаемое решение $\xi_N(t)$ уравнения (8) определено для всех $t \in R$. Более того, в силу уравнений (7) несложно также заметить, что в смысле замечания 1 теорема 1 справедлива для всех уравнений (8).

Определение 2. Пусть $(\varphi_{N_k}(t))_{k\in N}$ – равномерно ограниченная последовательность рекуррентных решений уравнений

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \vec{X}_{N_k}(x,t), \tag{9}$$

некоторым специальным образом выбранных из уравнения (8). Предположим также, что равномерно на каждом отрезке $[-T,T]$

$$\lim_{k\to+\infty} d_i\left(\varphi_{N_k}(t), \varphi(t)\right) = 0, i \in I. \tag{10}$$

Тогда мы будем говорить, что функция $t \to \varphi(t)$ – *обобщенно-рекуррентное* решение уравнения (2).

Замечание 2. То, что функция $t \to \varphi(t)$, построенная по формуле (10), является решением уравнения (2), почти очевидно. Ниже (при доказательстве теоремы 2) это будет показано строго.

Теорема 2. *Предположим, что для уравнения (2) выполнены условия (a) и (b). Тогда выражение (2) имеет по крайней мере одно обобщенно-рекуррентное решение* $\varphi(t)$.

Доказательство. Поскольку многообразие V компактно, то в силу замечания 1 для каждого $N = 1,2,\dots$ уравнение (8) имеет рекуррентное решение $\varphi_N(t)$. Последовательность $(\varphi_N(t))_{N\in N}$ равностепенно непрерывна на каждом отрезке $[-T,T]$ [9]. Следовательно, из $(\varphi_N(t))_{N\in N}$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(\varphi_{N_k}(t))_{k\in N}$, что существует функция $t \to \varphi(t)$, определенная и непрерывная при $t \in R$ и равномерно на $[-T,T]$ удовлетворяющая равенству (10) (см., например, источник [4, с. 489]).

Заметим теперь, что в силу уравнений (7) для всех $(x,t) \in V \times [-T,T]$

$$\vec{X}_{N_k}(x,t) = \vec{X}(x,t)$$

всякий раз, когда $N_k > T$. Следовательно, функция φ, удовлетворяющая равенству (10), является обобщенно-рекуррентным решением уравнения (2). Этим теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Принципиально новым результатом настоящей работы является факт установления обобщенно-рекуррентных решений.

С точки зрения системного анализа существование таких решений означает, что процессы, протекающие в неавтономных системах (ограниченном пространстве), устроены достаточно просто: любой такой процесс с любой наперед заданной степенью точности может быть аппроксимирован некоторой последовательностью рекуррентных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заде Л.А. Теория линейных систем. Метод пространства состояний / пер. с англ. В.Н. Варыгина [и др.]; под ред. Г.С. Поспелова. М.: Наука. 1970. 703 с.

2. Биркгоф Д. Динамические системы. М. – Ижевск: РХД. 1999. 408 с.

3. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М.: Наука. 1965. 424 с.

4. Шварц Л. Анализ: в 2 т. М.: ЕЕ Медиа. 2024. Т. 2. 534 с.

5. Хейл Д.К. Теория функционально-дифференциальных уравнений / пер. с англ. С.Н. Шиманова. М.: Мир. 1984. 421 с.

6. Cheban D.N. Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations. New York: Hindawi Publishing Corporation. 2009. 343 c.

7. Дзюба С.М. О рекуррентных движениях периодических процессов в секвенциально компактном топологическом пространстве // *Вестник российских университетов. Математика.* 2024. Т. 29. № 146. С. 138–148.

8. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 4-е изд. М.: ЛЕНАНД. 2017. 552 с.

9. Dzyuba S.M. On the Interrelation of Motions of Dynamical Systems on Compact Manifolds // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44. № 7. P. 2630–2637.

Для цитирования: Дзюба С.М., Емельянова И.И. О рекуррентных и обобщенно-рекуррентных решениях неавтономных дифференциальных уравнений // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2024. № 4 (24). С. 68–75.

ON RECURRENT AND GENERALIZED-RECURRENT SOLUTIONS OF NON-AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.M. DZYUBA, Dr. Sc., I.I. EMELYANOVA, Senior Lecturer

Tver State Technical University
22, Af. Nikitin emb., 170026, Tver, e-mail: sdzyuba@mail.ru

The article presents a definition of a recurrent solution to a differential equation with a periodic t right-hand side $\vec{X}(x,t)$, defined on the direct product of $V \times R$ a differentiable (of class C^2) compact manifold V located in an affine space E over the field of real numbers R, and a set R. A theorem on the existence of such solutions is also presented. As it turns out, this theorem has a number of rather important applications. Namely, for non-periodic functions $t \to \vec{X}(x,t)$, a definition of a generalized recurrent solution is introduced and, based on the theorem on the existence of recurrent solutions, the existence of generalized recurrent solutions is established. It is noted that the existence theorem of generalized recurrence solutions is a direct and natural development of the well-known theorems on the existence of asymptotic almost periodic and other Poisson stable solutions of differential equations with the corresponding right-hand side $\vec{X}(x,t)$.

Keywords: smooth compact manifold, differential equations, recurrent and generalized recurrent solutions.

Поступила в редакцию/received: 22.09.2024; после рецензирования/revised: 27.09.2024; принята/accepted: 01.10.2024

УДК 658.51

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНСТРУМЕНТОВ БЕРЕЖЛИВОГО ПРОИЗВОДСТВА И УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ

Г.Б. БУРДО, д-р техн. наук, А.Н. БОЛОТОВ, д-р техн. наук

Тверской государственный технический университет
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: gbtms@yandex.ru

Рассмотрена суть концептуальных понятий бережливого производства и управления качеством. Проанализированы основные ошибки в их понимании и применении. Установлено, что внедрение указанных систем целесообразно осуществлять на основе исследования процессов деятельности организации. Исследована иерархия организационно-технологических систем, показаны основные задачи, решаемые в рамках систем бережливого производства и управления качеством. Предложены инструменты бережливого производства и управления качеством, которые целесообразно использовать при обеспечении высокоэффективного машиностроительного производства. Даны предложения по перестройке структуры инженерных подразделений машиностроительных предприятий.