

are considered under conditions of elastic contact of micro-irregularities in the process of steady-state wear and brittle fracture of surfaces in the high-pressure area. The results of tribotechnical tests confirmed the good antifrictional characteristics of the diamond-containing ceramic material under dry friction conditions, which is explained by the presence of graphite in the material, which acts as a solid lubricant. A detailed analysis of the influence of granulometric characteristics and diamond grain concentration on the microstrength, critical pressure, and friction coefficient of the studied surfaces was conducted. Recommendations are given on the practical application of parts made of diamond-containing ceramic material in tribo units of science-intensive equipment.

Keywords: microarc oxidation, diamond-containing ceramic material, solid lubricant material, antifriction properties, microstrength, friction, wear.

Поступила в редакцию/received: 07.11.2025; после рецензирования/revised: 12.11.2025;
принята/accepted: 17.11.2025

УДК 621.891

DOI: 10.46573/2658-5030-2026-1-46-53

О РЕГРЕССИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.В. ИЗМАЙЛОВ, д-р техн. наук, А.Ф. ГУСЕВ, канд. техн. наук,
М.В. НОВОСЕЛОВА, канд. техн. наук

Тверской государственный технический университет,
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: iz2v2@mail.ru

© Измайлов В.В., Гусев А.Ф., Новоселова М.В., 2026

На примере контакта твердых тел с первоначальным касанием в точке (контакт шар – плоскость) проанализировано соответствие известных в трибологии линейных зависимостей, описывающих фрикционное взаимодействие технических поверхностей: удельной силы трения от фактического контактного давления и силы трения от внешней нормальной нагрузки. Отмечена необходимость учета адгезионного взаимодействия контактирующих тел, которое может быть сравнимо с величиной внешней нормальной силы, действующей на контактное соединение. Показано, что линейной зависимости удельной силы трения от фактического контактного давления непосредственно соответствует нелинейная зависимость силы трения от внешней нормальной нагрузки. Тем не менее, в некотором диапазоне изменения последней эта зависимость хорошо аппроксимируется линейным уравнением, известным как двучленный закон трения Кулона. Приведено сравнение результатов экспериментального измерения сил трения с их расчетными значениями, которое показало их хорошее соответствие для испытанных металлических пар трения.

Ключевые слова: сила трения, удельная сила трения, закон трения Кулона, контактная адгезия.

ВВЕДЕНИЕ

В трибологии хорошо известны две линейные эмпирические зависимости, описывающие фрикционное взаимодействие контактирующих поверхностей деталей машин и механизмов [1, 2]:

1. На интегральном уровне (уровне сил) это закон трения Ш. Кулона, описывающий соотношение силы трения F_{mp} и внешней нормальной контактной нагрузки N :

$$F_{mp} = F_0 + f_C N, \quad (1)$$

где F_0 – сила трения в отсутствие нормальной нагрузки; f_C – коэффициент трения по Кулону. Наличие слагаемого F_0 в уравнении (1) связывают с адгезионным взаимодействием контактирующих тел. Если рассматривать уравнение (1) как уравнение регрессии зависимой переменной (отклика) F_{mp} на независимую переменную (предиктор) N , то коэффициенты F_0 и f_C определяются методами математической статистики и являются постоянными (не зависящими от нормальной нагрузки) величинами для данной пары трения;

2. На дифференциальном уровне (уровне напряжений) это соотношение удельной силы трения τ и фактического контактного давления p_r :

$$\tau = \tau_0 + \beta p_r, \quad (2)$$

где τ_0 – удельная сила трения в отсутствие нормальных напряжений; β – так называемый пьезоэффициент; p_r – фактическое контактное давление. Удельная сила трения $\tau = F_{mp} / A_r$ представляет собой среднее касательное напряжение в контакте трущихся тел, а фактическое контактное давление $p_r = N / A_r$ – среднее нормальное напряжение в контакте (A_r – фактическая площадь контакта).

Уравнение (2) также связано с именем Ш. Кулона, оно известно в механике горных пород [3] как кулоновский критерий разрушения среды. В механике связных грунтов [4] уравнение (2) используется в виде

$$\tau_{kp} = \operatorname{tg}\theta \cdot \sigma_n + c, \quad (3)$$

и предложено Кулоном для расчета прочности связных грунтов при сдвиге τ_{kp} как функции нормального напряжения σ_n через коэффициенты $\operatorname{tg}\theta$ и c . Величина $\operatorname{tg}\theta$ – тангенс угла трения θ – аналог коэффициента трения f_C , а постоянная c – аналог τ_0 .

Помимо горных пород и грунтов, уравнение (2) также применимо к металлам, что подтверждается многочисленными экспериментами, например, известными опытами П. Бриджмена [5].

Вместо уравнения (1), для описания фрикционного взаимодействия часто используется более простое одночленное соотношение сил в виде так называемого закона трения Г. Амонтона

$$F_{mp} = f_A \cdot N, \quad (4)$$

где f_A – коэффициент трения по Амонтону. Очевидно, что при отсутствии адгезионного взаимодействия в контакте ($F_0 = 0$) законы трения Кулона и Амонтона совпадают.

Однако при наличии адгезионного взаимодействия в контакте трущихся тел, характерного, например, для металлов, параметр $F_0 > 0$, и коэффициент трения по

Амонтону, определенный в соответствии с уравнением (4) как отношение силы трения к нормальной силе, зависит от нагрузки:

$$f_A = \frac{F_{mp}}{N} = \frac{F_0}{N} + f_C.$$

Информативность величины f_A в этом случае невелика, так как для расчета силы трения в каком-либо фрикционном соединении требуется располагать не одним конкретным числовым значением коэффициента трения, а функциональной зависимостью $f_A(N)$.

С физической точки зрения более ценно уравнение (2), так как оно содержит удельные фрикционные характеристики, присущие данной паре материалов трущихся тел в данных условиях эксплуатации и не зависящие от размеров контактирующих деталей. С метрологической точки зрения полезнее уравнение (1), так как экспериментально измерять силы гораздо проще, чем непосредственно напряжения, но параметры фрикционного взаимодействия, входящие в уравнение (1), не обладают общностью, поскольку зависят в том числе от размеров контактирующих тел.

В связи с вышесказанным цель данной работы заключалась в анализе методических аспектов перехода от интегральных характеристик фрикционного взаимодействия к дифференциальным и обратно на конкретных примерах пар трения.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Рассмотрим контакт двух твердых тел с первоначальным касанием в точке по схеме шар – плоскость. Такая конфигурация позволяет воспользоваться для учета адгезионного взаимодействия контактирующих тел моделью адгезионного контакта Б.В. Дерягина с соавторами (так называемая модель ДМТ, или DMT в латинской транскрипции) [6]. Согласно этой модели, радиус площадки контакта a рассчитывается по теории Герца, но помимо приложенной к контакту внешней нормальной нагрузки N при расчете учитывается сила адгезионного взаимодействия $N_{адг} = 2\pi r\gamma$:

$$a = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{r}{E^*} (N + 2\pi r\gamma) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (5)$$

где r – радиус сферической поверхности; γ – энергия адгезии; E^* – эквивалентный модуль упругости, $E^* = \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$, E_1 , E_2 , μ_1 , μ_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов контактирующих тел.

На основании уравнения (5) можно записать для силы трения

$$F_{tp} = \tau\pi a^2 = \tau C N^{\frac{2}{3}}, \quad (6)$$

где τ – удельная сила трения; $N' = N + N_{адг}$; $C = \pi \left(\frac{3r}{4E^*} \right)^{\frac{2}{3}}$.

Фактическое контактное давление p_r можно представить в виде

$$p_r = \frac{N'}{\pi a^2} = \frac{(N')^{\frac{1}{3}}}{C}, \quad (7)$$

тогда из уравнений (2), (6) и (7) получим:

$$F_{mp} = \tau_0 C (N')^{\frac{2}{3}} + \beta N'. \quad (8)$$

В отличие от уравнения (1), зависимость (8) нелинейная. Однако она выражает зависимость силы трения от суммарной нормальной нагрузки N' (с учетом силы адгезии), тогда как закон трения Кулона выражает зависимость силы трения от внешней нормальной нагрузки N . В координатах F_{mp} , N зависимость силы трения от нормальной нагрузки хорошо аппроксимируется прямой линией, как это и выражает закон трения Кулона (рис. 1). Согласно рис. 1 сила трения $F_0 = 0,18$ мН, коэффициент трения $f_C = 0,25$. Сравнение расчетной зависимости с экспериментальными результатами приведено ниже.

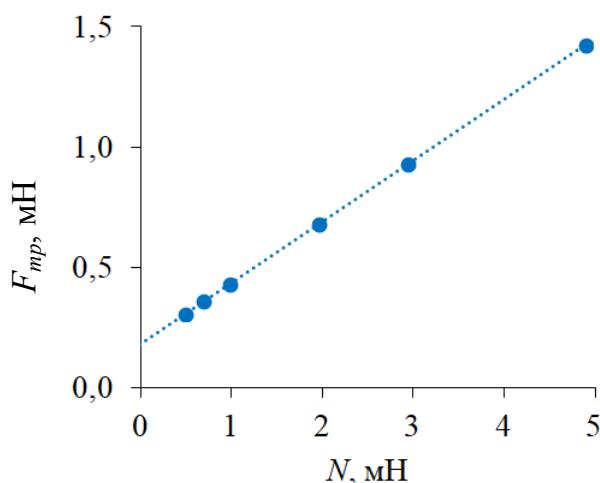


Рис. 1. Типичный вид расчетной зависимости силы трения от внешней нормальной нагрузки. Контакт стального шарового индентора с плоской медной поверхностью

ОБРАЗЦЫ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальное определение фрикционных характеристик различных пар трения проводили на микротрибометре [7] по схеме шар – плоскость, соответствующей приведенному выше теоретическому анализу. Материалы испытанных пар трения указаны в табл. 1.

Таблица 1. Исследованные пары трения

№ пары трения	Материалы контактирующих деталей	
	Плоская деталь	Шаровой индентор
1	Сплав Ni-Cr-B-Si (88 % Ni), лазерная наплавка [8]	Сталь ШХ15
2	Быстрорежущая сталь Р6М5	Цирконий йодидный
3	Быстрорежущая сталь Р6М5 [8]	Сплав ЗлМ800 (80 % Au, 20 % Cu)
4	Медь М1	Сталь ШХ15

Радиус шарового индентора $r = 0,5$ мм во всех парах трения. Внешняя нормальная нагрузка на контакт изменялась в диапазоне $N = 0,2 \dots 6$ мН. Шероховатость поверхности образцов Ra не более 0,16 мкм. Диапазон нагрузок, механические свойства материалов пар трения и шероховатость поверхности образцов обеспечивают заведомо упругий контакт, при этом деформационной составляющей сил трения можно пренебречь. Перед экспериментом поверхность образцов обрабатывали полярным и неполярным растворителями и протирали хлопчатобумажной тканью.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 приведены сравнения экспериментальных зависимостей статической силы трения от внешней нагрузки и аналогичных расчетных зависимостей по описанной выше методике. Из рисунка видно, что как первые, так и вторые зависимости хорошо аппроксимируются линейной зависимостью (коэффициент корреляции R не менее 0,97). Параметры удельной силы трения τ_0 и β , положенные в основу расчета интегральной статической силы трения F_{tp} , а также параметры расчетной и экспериментальной зависимости силы трения от внешней нормальной нагрузки (параметры закона Кулона F_0 и f_C) представлены в табл. 2. Расхождение расчетных и экспериментальных значений параметра F_0 в среднем составляет 21 %, коэффициента трения $f_C - 5\%$.

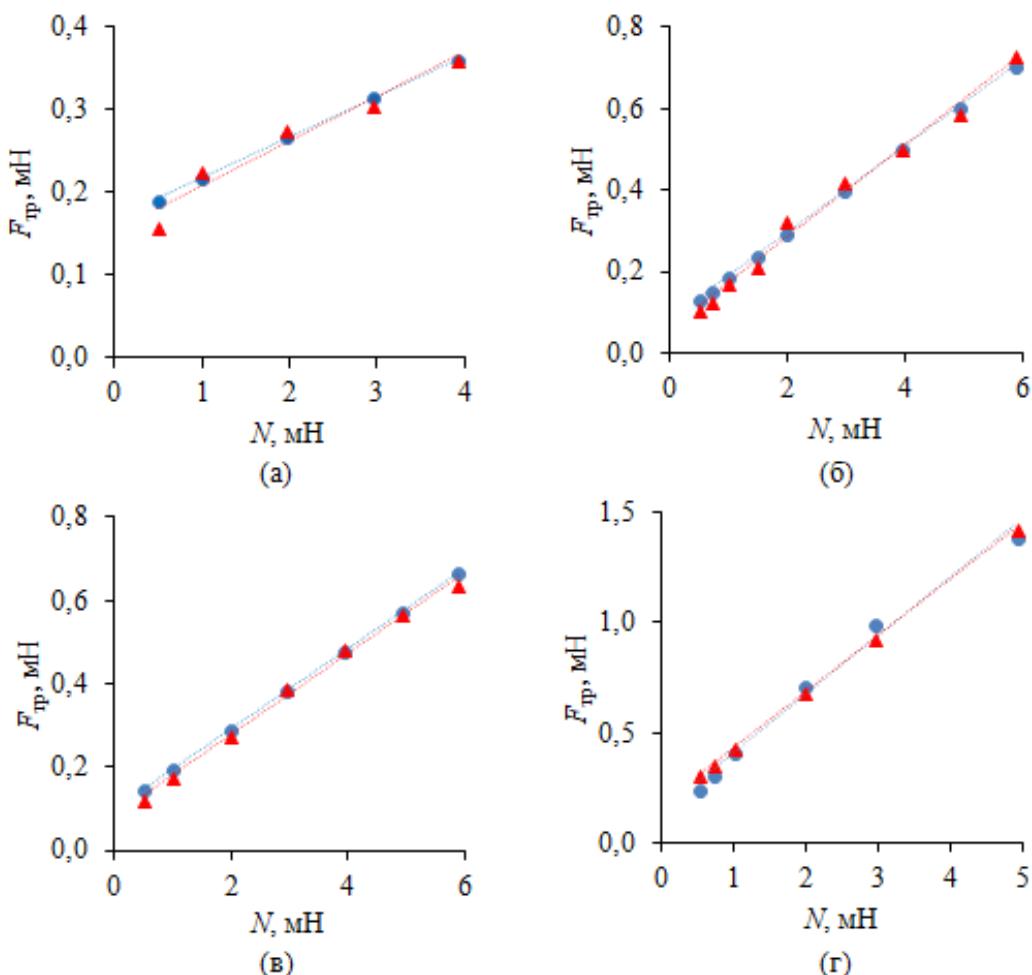


Рис. 2. Зависимости статической силы трения от внешней нормальной нагрузки на контакт для пар трения (см. табл. 1): пара № 1 (а); № 2 (б); № 3 (в); № 4 (г);

● – расчет, ▲ – эксперимент

Таблица 2. Фрикционные параметры исследованных пар трения

№ пары трения	Удельная сила трения			Интегральная сила трения			
				Расчет		Эксперимент	
	τ_0 , МПа	β	γ , Дж/м ²	F_0 , мН	f_c	F_0 , мН	f_c
1	10	0,020	0,70	0,17	0,049	0,16	0,053
2	4,5	0,087	0,17	0,085	0,11	0,063	0,11
3	1,4	0,090	0,30	0,10	0,096	0,084	0,097
4	1,0	0,25	0,22	0,18	0,25	0,15	0,26

Отдельного обсуждения заслуживает величина энергии адгезии γ . Поскольку она очень сильно зависит от состояния поверхности контактирующих тел (наличия физически и химически адсорбированных пленок, субшероховатости и других трудно учитываемых факторов), теоретически оценить ее весьма сложно. В данном случае оценку величины энергии адгезии можно провести из следующих соображений. Из уравнения (1) следует, что при внешней нормальной силе $N = -\frac{F_0}{f_c}$ сила трения равна нулю, т. е. адгезионное взаимодействие между контактирующими телами отсутствует (деформационной составляющей силы трения в описываемых экспериментах, как уже отмечалось, можно пренебречь). Модуль этой силы логично принять за силу адгезии $N_{адг} = \frac{F_0}{f_c}$. Аналогичным образом поступают в механике грунтов: нормальное давление σ , при котором сопротивление сдвигу связного грунта τ_{kp} обращается в нуль (см. уравнение (3)), называют давлением связности и расценивают как эквивалент сил сцепления частиц грунта [4].

Следуя DMT-модели адгезионного контакта (см. выше), по величине силы адгезии можно оценить величину энергии адгезии: $\gamma = \frac{F_0}{2\pi r f_c}$, где r – радиус шарового индентора. Полученные таким образом средние оценки для всех испытанных образцов следующие: для пары трения № 1 величина адгезии $\gamma = 0,68$ Дж/м²; № 2 – 0,18 Дж/м²; № 3 – 0,28 Дж/м²; № 4 – 0,18 Дж/м². Они согласуются с приведенными в табл. 2 значениями и, как показано в работах [9, 10], являются вполне реалистичными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере контакта твердых тел с первоначальным касанием в точке по схеме шар – плоскость проанализировано соотношение двух линейных корреляционных зависимостей фрикционных характеристик: на дифференциальном уровне (зависимость удельной силы трения от фактического контактного давления) и на интегральном уровне (зависимость силы трения от внешней нормальной контактной нагрузки). Показано, что при расчете зависимости силы трения от нормальной нагрузки $F_{тр}(N)$ на основании линейной зависимости удельной силы трения от фактического контактного давления $\tau(p_r)$ получается нелинейная функция, которая в некотором диапазоне нагрузок тем не менее хорошо аппроксимируется линейным уравнением, известным как закон трения Кулона. При этом в расчете, как правило, необходимо учитывать адгезионное взаимодействие контактирующих тел. Для контакта шар – плоскость, рассмотренного в статье, это можно сделать с помощью модели адгезионного контакта Б.В. Дерягина с соавторами (DMT-модель). Приведенные экспериментальные

результаты подтвердили адекватность таких расчетов для испытанных металлических пар трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хопин П.Н., Шишкун С.В. Трибология: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2021. 236 с.
2. Доценко А.И., Буяновский И.А. Основы триботехники: учебник. М.: ИНФРА-М, 2014. 336 с.
3. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 с.
4. Ким М.С., Ким В.Х. Основы механики грунтов: учебное пособие. М.; Вологда: Инфра-Инженерия, 2022. 200 с.
5. Бриджмен П.У. Исследования больших пластических деформаций и разрыва: Влияние высокого гидростатического давления на механические свойства материалов. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 448 с.
6. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P. Effect of Contact Deformations on the Adhesion of Particles // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1975. V. 53. P. 314–326.
7. Патент РФ 2150688. Способ определения коэффициента трения покоя поверхностных слоев материала / Измайлов В.В., Гусев А.Ф., Нестерова И.Н., Иванова А.А. Заявл. 25.12.1998. Опубл. 10.06.2000, Бюл. № 16.
8. Афанасьева Л.Е., Новоселова М.В., Измайлов В.В., Барчуков Д.А. Исследование триботехнических свойств поверхностей, полученных воздействием концентрированных потоков энергии: монография. Тверь: ТвГТУ, 2022. 164 с.
9. Болотов А.Н., Измайлов В.В., Новоселова М.В. Теоретические и экспериментальные исследования процессов в триботехнических системах: монография / под общ. ред. В.В. Измайлова. Тверь: ТвГТУ, 2019. 164 с.
10. Мамонова М.В., Прудников В.В., Прудникова И.А. Физика поверхности. Теоретические модели и экспериментальные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 400 с.

Для цитирования: Измайлов В.В., Гусев А.Ф., Новоселова М.В. О регрессионных зависимостях, используемых для описания фрикционного взаимодействия технических поверхностей // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2026. № 1 (29). С. 46–53.

ON THE REGRESSION RELATIONSHIPS USED TO DESCRIBE THE FRICTIONAL INTERACTION OF ENGINEERING SURFACES

V.V. IZMAILOV, Dr. Sc., A.F. GUSEV, Cand. Sc.,
M.V. NOVOSELOVA, Cand. Sc.

Tver State Technical University,
22, Af. Nikitin emb., Tver, 170026, e-mail: iz2v2@mail.ru

Using the initial point contact of solids (ball – plane contact) as an example, the correspondence between well-known tribological linear relationships describing the frictional interaction of technical surfaces is analyzed: the specific friction force dependence on the actual contact pressure and the friction force dependence on the external normal load. It is noted, that the adhesive interaction of contacting bodies, which can be compared with the

magnitude of the external normal force, has to be taken into account. It is shown that the linear dependence of the specific friction force on the actual contact pressure directly corresponds to the nonlinear dependence of the friction force on the external normal load. However, over a certain range of the latter's variation, this dependence is well approximated by a linear equation known as Coulomb's two-term friction law. A comparison of the experimental friction force measurements with their calculated values is provided, demonstrating good agreement for the tested metal friction pairs.

Keywords: friction force, specific friction force, Coulomb's friction law, contact adhesion.

Поступила в редакцию/received: 17.11.2025; после рецензирования/revised: 24.11.2025;
принята/accepted: 28.11.2025

УДК 621.791.92:621.891

DOI: 10.46573/2658-5030-2026-1-53-61

О ФРИКЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПОВЕРХНОСТИ ЛАЗЕРНОЙ НАПЛАВКИ НИКЕЛЕВОГО СПЛАВА

В.В. ИЗМАЙЛОВ, д-р техн. наук, Л.Е. АФАНАСЬЕВА, канд. физ.-мат. наук,
М.В. НОВОСЕЛОВА, канд. техн. наук

Тверской государственный технический университет,
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: ludmila.a@mail.ru

© Измайлов В.В., Афанасьева Л.Е., Новоселова М.В., 2026

Исследованы фрикционные характеристики порошковой лазерной наплавки никелевого сплава: силы трения, коэффициента трения и удельной силы трения. Порошковую лазерную наплавку осуществляли последовательным нанесением трех слоев с использованием многоканального лазера. После наплавки поверхность покрытия дополнительно переплавляли на разных режимах лазерного излучения, изменяя условия кристаллизации сплава. В результате на всех образцах в поверхностном слое сформировалась однотипная микроструктура, различающаяся только размером структурных составляющих. Показано, что изменение режимов плавления поверхности покрытия в выбранном диапазоне не оказывает заметного влияния на фрикционные характеристики контакта стального индентора с поверхностью покрытия.

Ключевые слова: коэффициент трения, удельная сила трения, порошковая лазерная наплавка, многоканальный лазер, сплавы никеля.

ВВЕДЕНИЕ

Повышение износстойкости материалов узлов трения является актуальной задачей трибологии. Технологические возможности лазерного модифицирования контактных поверхностей позволяют успешно решить указанную задачу путем нанесения наплавленных износстойких покрытий. Для этого широко используются различные присадочные материалы, например порошки состава Ni-Cr-B-Si [1–3]. Сплавы на основе никеля широко применяются в различных отраслях промышленности, таких как нефтегазовая, химическая, нефтехимическая, горнодобывающая, при производстве форм для стекла, для технического обслуживания и ремонта деталей машин [4–6].