ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

УДК 517.938 DOI: 10.46573/2658-5030-2026-1-86-93

ОБ ОДНОМ НОВОМ СВОЙСТВЕ РЕКУРРЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА КОМПАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С.М. Дзюба, д-р физ.-мат. наук, И.И. Емельянова, магистр

Тверской государственный технический университет,
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: sdzyuba@mail.ru

На основании определений минимального множества и рекуррентного движения, введенных Дж. Биркгофом в начале прошлого века, получено новое достаточное условие рекуррентности движений динамических систем на топологическом компактном многообразии V. Это условие дает достаточно полное представление о структуре рекуррентного движения как функции времени на V и, таким образом, органично дополняет классическое определение Биркгофа. Одно из основных значений данного результата состоит в том, что он приводит к новому методу приближенного построения рекуррентных движений. Предложенный метод без принципиальных изменений может быть применен к построению к построению асимптотических рекуррентных решений неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: топологическое компактное многообразие, динамические системы, рекуррентные движения.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, даже классические задачи анализа замкнутых систем автоматического регулирования тесно связаны с задачами теории динамических систем (см., например, [1]), что особенно прослеживается в монографиях [2, 3]. Представлено мощное современное развитие этих результатов [4], и установлена их связь с проблемой моделирования турбулентного движения идеальной жидкости [5].

Заметим, что важная гипотеза, связанная с моделированием турбулентности [3], оказалась некорректной вследствие неверной трактовки расположения рекуррентных движений, что было показано в [6]. Коротко обсудим это.

Пусть Σ – компактное метрическое пространство с метрикой d и R – поле действительных чисел. Рассмотрим отображение $f\colon R \times \Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t,p) = g^t p.$$

При этом будем считать:

(a1) отображение f непрерывно по совокупности переменных t,p на множестве $R \times \Sigma$;

(а2) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

(а3) для всех $t, \tau \in R$

$$g^{t+\tau} = g^t g^\tau.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t – *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \to f(t,p)$ – *движение* (см. [7, с. 347]).

Из всех движений особое значение имеет рекуррентное [8, с. 204]. Напомним, что движение $f(t,p)$ называется *рекуррентным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T_\varepsilon > 0$, что для всех $\tau \in R$ дуга

$$K_{\tau,T_\varepsilon} = \{f(t,p): t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]\}$$

траектории

$$K = \{f(t,p): t \in R\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию K с точностью ε [7, с. 402]. При этом само понятие рекуррентного движения прямо связано с понятием минимального множества.

В самом деле, в компактном пространстве Σ замыкание траектории рекуррентного движения представляет собой компактное минимальное множество [7, с. 404]. Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами [7, с. 400]. Напомним также, что любое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентно [7, с. 402].

Как известно, каждое компактное пространство движений Σ содержит компактное минимальное множество M. Найдется такая вполне упорядоченная система компактных инвариантных множеств

$$\Sigma \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_\omega \supset M_{\omega+1} \supset \cdots, \quad (1)$$

занумерованных всеми порядковыми числами первого и второго классов, что

$$M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_\omega \cap M_{\omega+1} \cap \ldots$$ [7, с. 401].

Как ни покажется это странным, изначально и вплоть до самого последнего времени структура последовательности (1) изучалась в самом общем виде (см., например, [9, с. 1–4]), что, говоря в целом, и послужило причиной ошибки в [3]. Детальное изучение данной структуры выявило ряд новых свойств движений системы g^t [10]. Это позволило в статье [11] существенным образом упростить устоявшееся представление о взаимоотношении движений на топологическом компактном многообразии V, фактически изложенное в [8, гл. VII] и с тех пор не менявшееся.

Основной целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов статей [6, 11], позволяющее выявить некоторое новое свойство рекуррентных движений на V.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть V – топологическое компактное многообразие размерности n и пусть на V задана полная однопараметрическая группа преобразований g^t. По определению g^t представляет собой динамическую систему, для которой установлены все базовые понятия и свойства общей теории динамических систем [8, гл. VII].

Зафиксируем произвольный атлас $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$ многообразия V, где Φ_s – некоторая открытая часть пространства R^n и φ_s – гомеоморфизм Φ_s на $V_s \subset V$. При этом, поскольку V компактно, будем считать, что число S конечно.

Следуя Биркгофу, будем называть любое движение $f(t,p)$ системы g^t, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентным. Кроме того, заметим, что Биркгоф фактически доказал следующее [8, с. 203]: *для рекуррентности движения $f(t,p)$ на V необходимо и достаточно, чтобы для каждого сколь угодно малого положительного числа ε нашлось такое $T_\varepsilon > 0$, что при всех $\tau \in R$ и $\sigma \in R$ существует такое $t \in [\sigma, \sigma + T_\varepsilon]$, что $\parallel \varphi_s^{-1}\big(f(\tau,p)\big) - \varphi_s^{-1}\big(f(t,p)\big) \parallel < \varepsilon$ на одном из множеств Φ_s*. Последнее, очевидно, полностью соответствует приведенному ранее современному определению рекуррентного движения.

В дальнейшем при исследовании рекуррентных движений системы g^t мы будем интерпретировать многообразие V как полуметрическое пространство с отделимой структурой.

Напомним, что топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если топология в нем индуцирована направленным семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [12, с. 456]).

Напомним также, что функция $d_\gamma : \Gamma \times \Gamma \to$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(s1) для всех $(p,q) \in \Gamma \times \Gamma$

$$d_\gamma(p,q) = d_\gamma(q,p);$$

(s2) для всех $p \in \Gamma$

$$d_\gamma(p,p) = 0,$$

а случай

$$d_\gamma(p,q) = 0$$

не исключается при $q \neq p$;

(s3) для всех $p \in \Gamma, q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p,q) \leq d_\gamma(p,r) + d_\gamma(r,q).$$

И, наконец, напомним, что семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I}$ называется *направленным*, если для любой конечной части $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \geq d_j$ для всех $j \in J$. Если же для каждой пары $p \neq q$ найдется такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(p,q) > 0,$$

то будем говорить, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* [12, с. 456].

Заметим теперь, что многообразие V полуметризуемо как топологическое компактное пространство [12, с. 458]. Полуметрики на V мы определим следующим образом.

Зафиксируем некоторую точку $x \in V$, некоторую ее связную окрестность E и зададим непрерывную функцию $\gamma: V \rightarrow$, такую, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in E$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда равенство

$$d_\gamma(p,q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

дает полуметрику d_γ на V [12, с. 457].

Изменяя функцию γ, мы можем получать различные полуметрики d_γ. Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I_E}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ найдется полуметрика d_γ, для которой $d_\gamma(p,q) > 0$. Проделав эту процедуру на всех связных окрестностях E всех точек $x \in V$, мы превратим V в полуметрическое пространство с отделимой структурой, в котором топология индуцирована семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$. Очевидно, что эта топология совпадает с исходной, введенной на V атласом $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$.

Заметим теперь, что использование полуметрик позволяет переписать упомянутое выше утверждение Биркгофа в следующем более простом виде, формально не связанном с атласом $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$: *для рекуррентности движения $f(t,p)$ на V необходимо и достаточно, чтобы для каждого сколь угодно малого положительного числа ε нашлось такое $T_\varepsilon > 0$, что при всех $\tau \in R$ и $\sigma \in R$ существует такое $t \in [\sigma, \sigma + T_\varepsilon]$, что*

$$d_i\big(f(\tau,p), f(t,p)\big) < \varepsilon, i \in I.$$

НОВОЕ СВОЙСТВО РЕКУРРЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Вообще говоря, приведенные выше свойства рекуррентного движения не дают достаточно полного представления о его структуре как функции времени. Этот недостаток компенсируется новым свойством рекуррентных движений на V, которое устанавливает следующая

Теорема 1. *Пусть $f(t,p)$ – некоторое движение системы g^t, определенной на V, и пусть T – некоторое положительное число. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N_ε, зависящее также от T, что для всех $t \in R$*

$$d_i\big(f(t,p), f(t + N_\varepsilon T, p)\big) < \varepsilon, i \in I. \tag{2}$$

Тогда $f(t,p)$ – рекуррентное движение.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу неравенства (2) найдется такая последовательность натуральных чисел $(N_k)_{k\in N} \uparrow +\infty$, что

$$lim_{k\to+\infty} \sup_{t\in\square} d_i\big(f(t,p), f(t+N_kT,p)\big) = 0, i \in I. \quad (3)$$

Для всех $N = 0, 1, \ldots$ обозначим через P_N множество функций

$$t \to f(t+(N+m)T,p), m = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0,T]$. Далее обозначим через $\acute{P}_N$ замыкание множества P_N и, принимая во внимание тот факт, что пространство V метризуемо, заметим, что любое множество P_N равностепенно непрерывно на $[0,T]$, т. е. для каждого $\eta > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $m = 0, 1, \ldots$

$$d_i\big(f(t_1+(N+m)T,p)\big), f(t_2+(N+m)T,p)) < \eta, i \in I, \quad (4)$$

всякий раз, когда $|t_1 - t_2| < \delta$ [12, с. 460, 462, 477].

В самом деле, для простоты обозначений положим

$$p_m = f(mT,p), m = 0, 1, \ldots,$$

и заметим, что в силу аксиомы (a3)

$$f(t+mT,p) = f\big(t, f(mT,p)\big) = f(t,p_m).$$

Поскольку пространство V компактно, то функция $(t,x) \to g^t x$ равномерно непрерывна на множестве $[0,T]\times V$, т. е. для всех $\eta > 0$ и $i \in I$ существуют такие $\delta > 0$ и $j \in I$, что на $[0,T]\times V$

$$d_i\big(f(t_1,q)\big), f(t_2,r)) < \eta$$

всякий раз, когда $d_j(q,r) < \delta$ и $|t_1 - t_2| < \delta$ [12, с. 458]. Поэтому без какой-либо потери общности можем считать, что для всех $m = 0, 1, \ldots$

$$d_i\big(f(t_1,p_m), f(t_1,r)\big) < \frac{\eta}{3},$$

$$d_i\big(f(t_2,p_m), f(t_2,r)\big) < \frac{\eta}{3}$$

и

$$d_i\big(f(t_1,r), f(t_2,r)\big) < \frac{\eta}{3}$$

при всех $d_j(p_m,r) < \delta$ и $|t_1 - t_2| < \delta$.

Таким образом, согласно неравенству треугольника для всех $m = 0, 1, \ldots$

$$d_i\big(f(t_1,p_m), f(t_2,p_m)\big) \le d_i\big(f(t_1,p_m), f(t_1,r)\big) +$$
$$+ d_i\big(f(t_2,p_m), f(t_2,r)\big) + d_i\big(f(t_1,r), f(t_2,r)\big) < \eta$$

всякий раз, когда $d_j(p_m, r) < \delta$ и $|t_1 - t_2| < \delta$, т. е. множество P_0 равностепенно непрерывно.

Заметим теперь, что неравенство (4) выполняется равномерно относительно N, т. е. все множества P_N равностепенно непрерывны. Значит, согласно третьей теореме Асколи все множества $\acute{P}_N$ компактны в топологии равномерной сходимости [12, с. 489]. Кроме того, по построению

$$P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_N \supset \cdots,$$

а в силу равенства (3) каждое множество $\acute{P}_N$ инвариантно. Следовательно,

$$\acute{P}_0 = \acute{P}_1 = \cdots = \acute{P}_N = \cdots \tag{5}$$

Заметим теперь, что в силу равенства (3)

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{t\in\square} d_i\big(f(t,p), f(t - N_k T, p)\big) = 0, i \in I.$$

Для всех $N = 0, 1, \ldots$ обозначим через P'_N множество функций

$$t \to f(t - (N - m)T, p), m = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Пусть $\acute{P}'_N$ – замыкание множества P'_N. Тогда, действуя так же, как и выше, несложно показать, что все множества $\acute{P}'_N$ компактны в топологии равномерной сходимости, инвариантны и удовлетворяют условию

$$\acute{P}'_0 = \acute{P}'_1 = \cdots = \acute{P}'_N = \cdots = \acute{P}_0. \tag{6}$$

Очевидно, что при любом $p \in V$, для которого выполнены условия теоремы 1, каждая точка последовательности функций $\big(f(t + mT, p)\big)_{m\in N}$ является ее точкой сгущения, а множество $\acute{P}'_0$ – наименьшим замкнутым множеством, содержащим все эти точки. Поэтому согласно компактности и инвариантности множеств $\acute{P}_N, \acute{P}'_N$ и равенствам (5), (6) несложно заметить, что замыкание $\acute{K}$ траектории K движения $f(t, p)$ – компактное минимальное множество. Значит, в силу определения Биркгофа $f(t, p)$ – рекуррентное движение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основное практическое значение теоремы 1 состоит в том, что она фактически намечает простой путь построения рекуррентных движений на V, ранее неизвестный.

В самом деле, пусть T – некоторое положительное число и пусть $f(t,p)$ – произвольное движение. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in N$, что

$$\| \varphi_s^{-1}(f(p) - \varphi_s^{-1}\big(f(N_\varepsilon T, p)\big) \| < \varepsilon$$

на соответствующей карте (Φ_s, φ_s) атласа $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$. Тогда, как видно из доказательства теоремы 1, $f(t,p)$ – рекуррентное движение, т. е. для построения $f(t,p)$ нужно подобрать некоторый численный метод и соответствующее ему число T.

Остается добавить, что согласно результатам статьи [13] данный подход может быть применен к построению асимптотических рекуррентных решений неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. СПб.: Профессия, 2007. 747 с.

2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.

4. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // *Тр. МИАН СССР*. 1967. Вып. 90. С. 3–210.

5. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

6. Дзюба С.М. О некоторых свойствах движений динамических систем на компактных многообразиях // *Вестник российских университетов. Математика.* 2025. Т. 30. № 149. С. 28–40.

7. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 550 с.

8. Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 408 с.

9. Cheban D.N. Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2009. 204 p.

10. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем // *Вестник российских университетов. Математика*. 2021. Т. 26. № 133. С. 5–14.

11. Dzyuba S.M. On the Interrelation of Motions of Dynamical Systems on Compact Manifolds // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44. № 7. P. 2630–2637.

12. Шварц Л. Анализ / пер. с фр. Б.П. Пугачева: в 2 т. / под ред. С.Г. Крейна. М.: Мир, 1972. Т. 2. 528 с.

13. Дзюба С.М., Емельянова И.И. О рекуррентных и обобщенно-рекуррентных решениях неавтономных дифференциальных уравнений // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки».* 2024. № 4 (24). С. 69–76.

Для цитирования: Дзюба С.М., Емельянова И.И. Об одном новом свойстве рекуррентных движений динамических систем на компактных многообразиях // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2026. № 1 (29). С. 86–93.

ON A NEW PROPERTY OF RECURRENT MOTIONS OF DYNAMIC SYSTEMS ON COMPACT MANIFOLDS

S.M. DZYUBA, Dr. Sc., I.I. EMELYANOVA, Postgraduate

Tver State Technical University,
22, Af. Nikitin emb., 170026, Tver, e-mail: sdzyuba@mail.ru

Based on the definitions of minimal set and recurrent motion introduced by J. Birkhoff at the beginning of the last century, a new sufficient condition for the recurrence of motions of dynamical systems on a topological compact manifold V is obtained. This condition gives a fairly complete picture of the structure of recurrent motion as a function of time on V and, thus, organically complements Birkhoff's classical definition.

One of the main results of this paper is that it leads to a new method of approximate recurrent movements. This method can be applied without fundamental changes to the construction of asymptotic recurrent solutions of nonautonomous systems of ordinary differential equations.

Keywords: topological compact manifold, dynamical systems, recurrent motions.

Поступила в редакцию/received: 30.10.2025; после рецензирования/revised: 10.11.2025; принята/accepted: 12.11.2025

УДК 681.5 DOI: 10.46573/2658-5030-2026-1-93-108

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ РИСК-МЕНЕДЖМЕНТОМ С ПРИМЕНЕНИЕМ TELEGRAM-БОТА

Н.Г. МАРИЛОВ, асп., Л.В. КОЗЫРЕВА, д-р техн. наук, Е.И. МАРИЛОВА, студ.

Тверской государственный технический университет,
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: marilov_nikitka@mail.ru

В статье приведено определение интеграционного подхода к оценке профессиональных рисков, реализованного в виде Telegram-бота. Подход синтезирует три взаимодополняющих метода: детерминированную оценку на основе специальной оценки условий труда (СОУТ), вероятностное моделирование по методу Монте-Карло и оценку неопределенности по руководству GUM. Проведенная апробация решения установила его эффективность, выражающуюся в повышении оперативности оценки и росте вовлеченности персонала. Сравнительный анализ выявил, что в 40 % случаев точечные оценки СОУТ соответствовали интервальным данным модели, а в 15 % – оказались заниженными. Данный подход является прямым развитием традиционных методов, преодолевающим их ограничения за счет комплексного учета вероятностной природы и неопределенности исходных данных, что позволяет перейти от реактивного к превентивному управлению рисками.

Ключевые слова: профессиональные риски, оценка рисков, Telegram-бот, метод Монте-Карло, GUM, СОУТ, цифровизация охраны труда, риск-менеджмент.