

APPLICATION OF SURFACE PROFILE CHARACTERISTICS TO MODELING CONTACT INTERACTION OF COMPOSITE MATERIALS

O.O. NOVIKOVA, Cand. Sc., V.V. NOVIKOV, Cand. Sc., A.N. BOLOTOV, Dr. Sc.

Tver State Technical University
22, Af. Nikitin emb., Tver, 170026, e-mail: onvk@mail.ru

The validity of the classical approach to solving contact problems for two-component composite surfaces based on the control of the microgeometry of the surface profile is shown. A homogeneous half-space of matrix material is considered as a composite surface, with spherical segments of the same radius located in it with a given volume density, simulating inclusions of a globular filler material. The profile of the composite half-space is an equivalent surface with a power-law distribution of the vertices of the micro-dimensions, similar to the reference curve of the material distribution of the real part. An engineering model for estimating the frictional characteristics of a triboassembly with composite materials has been tested in relation to the contact of a diamond-containing ceramic material and a ceramic homogeneous half-space. This model can be used to determine the friction characteristics of composite materials with globular fillers.

Keywords: microgeometry of the surface, contact problem, friction characteristics, composite materials, friction, wear.

Поступила в редакцию/received: 02.02.2026; после рецензирования/revised: 10.02.2026;
принята/accepted: 11.02.2026

УДК 621.891

DOI: 10.46573/2658-5030-2026-2-69-78

УДЕЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КОНТАКТЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.В. ИЗМАЙЛОВ, д-р техн. наук, М.В. НОВОСЕЛОВА, канд. техн. наук

Тверской государственный технический университет,
170026, Тверь, наб. Афа. Никитина, 22, e-mail: iz2v2@mail.ru

© Измайлов В.В., Новоселова М.В., 2026

На примере единичного и множественного контакта технических поверхностей проанализировано соответствие известных в трибологии линейных зависимостей, описывающих их фрикционное взаимодействие: удельной силы трения от фактического контактного давления и силы трения от внешней нормальной нагрузки (закон трения Кулона). Показано, что линейной зависимости удельной силы трения от фактического контактного давления в общем случае соответствует нелинейная зависимость силы трения от внешней нормальной нагрузки. Причина этой нелинейности – зависимость величины фактической площади контакта от нормальной контактной нагрузки. Однако в ограниченном диапазоне изменения последней эта нелинейность проявляется слабо, особенно для множественного контакта, поэтому зависимость силы трения от нормальной нагрузки можно адекватно описывать

двучленным линейным уравнением, выражающим закон трения Кулона. Правомерность этого утверждения проверена экспериментально на примере четырех металлических пар трения.

Ключевые слова: технические поверхности, фактическая площадь контакта, сила трения, удельная сила трения, закон трения Кулона.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе авторы продолжают и обобщают анализ взаимного соответствия эмпирических зависимостей, описывающих фрикционное взаимодействие технических поверхностей: зависимости удельной силы трения от фактического контактного давления и зависимости интегральной силы трения от нормальной контактной нагрузки [1, 2].

В механике и физике твердого тела и других естественных и технических науках прочностные характеристики конструкционных материалов принято выражать через соответствующие напряжения – нормальные или касательные, под действием которых происходит разрушение материала. В трибологии аналогичной прочностной характеристикой фрикционного контакта с размерностью напряжения является удельная сила трения (точнее, максимальная статическая удельная сила трения), соответствующая критическому напряжению сдвига, при котором контактирующие тела, образующие фрикционную пару, приходят в относительное скольжение. Удельная сила трения τ вычисляется как отношение соответствующей интегральной силы трения F_{mp} к фактической площади контакта A_r :

$$\tau = \frac{F_{mp}}{A_r}.$$

Эксперименты показывают [3, 4], что величина удельной силы трения в общем случае зависит от нормального напряжения в контакте:

$$\tau = \tau_0 + \beta p_r, \quad (1)$$

где p_r – фактическое контактное давление, равное среднему нормальному напряжению на площадках фактического контакта; τ_0 и β – коэффициенты, характерные для данной конкретной пары трения в данных конкретных условиях эксплуатации.

Аналогичная зависимость критического напряжения сдвига от нормального давления наблюдается и для сплошных сред, о чем свидетельствуют, например, известные эксперименты П. Бриджмена [5].

Для интегральной силы трения также существует двучленная зависимость, аналогичная по форме зависимости (1), – так называемый закон трения Ш. Кулона [6, 7]:

$$F_{mp} = F_0 + f_c N, \quad (2)$$

где f_c – коэффициент трения; N – нормальная сила.

В механике сплошных сред переход от удельных характеристик (напряжений) к интегральным (силам) происходит простым умножением напряжения на соответствующую площадь сечения детали, на которой действует данное напряжение, при этом площадь сечения в данном расчете является постоянной величиной. В результате, если напряжение описывается линейной функцией вида (1), после умножения получаем также линейную зависимость тангенциальной силы от нормальной, по форме аналогичной зависимости (2).

В случае фрикционного контакта такого простого перехода от удельной силы трения к интегральной не получается, поскольку фактическая площадь контакта A_r не является в общем случае постоянной величиной и зависит от нормальной силы: $A_r = A_r(N)$. В результате получим:

$$F_{mp} = \tau A_r(N) = \tau_0 A_r(N) + \beta p_r A_r(N) = \tau_0 A_r(N) + \beta N.$$

Зависимость $A_r(N)$ в общем случае носит степенной характер $A_r = CN^m$, где $m \leq 1$, и тогда линейной зависимости (1) для удельной силы трения соответствует нелинейная зависимость интегральной силы трения:

$$F_{mp} = \tau_0 CN^m + \beta N. \quad (3)$$

При $m = 0$ (постоянная площадь контакта) приходим к закону трения Кулона (уравнение (2)), при $m = 1$ (площадь контакта прямо пропорциональна нагрузке) – к закону трения Амонтона $F_{mp} = f_A N$, где $f_A = \tau_0 C + \beta$ – коэффициент трения по Амонтону.

Цель данной работы заключается в теоретико-экспериментальном исследовании соответствия широко используемых в трибологии линейных зависимостей (1) и (2).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В работе [1] показано, что в общем случае при переходе от линейной зависимости (2) для силы трения к зависимости удельной силы трения от фактического контактного давления получается нелинейная немонотонная зависимость $\tau(p_r)$, которая только в некотором диапазоне удельных нагрузок может быть аппроксимирована линейной зависимостью вида (1).

В работе [2] показано, что обратный переход от линейной зависимости (1) к зависимости интегральной силы трения от нормальной контактной нагрузки $F_{тр}(N)$ также приводит к нелинейной зависимости.

Проведем более детальный анализ этого перехода с обобщением на случай множественного контакта шероховатых поверхностей, а также проанализируем соответствие параметров удельной и интегральной сил трения как функций контактной нагрузки.

Единичный контакт. Под единичным контактом понимается контакт шар – плоскость с первоначальным касанием в точке. Во-первых, такая схема удобна контролируемой величиной фактической площади контакта, которая представляет собой круг радиусом a , рассчитываемым по известной формуле Г. Герца

$$a = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{Nr}{E^*} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4)$$

где N – нормальная нагрузка; r – радиус шара; E^* – эквивалентный модуль упругости; $E^* = \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$; E_1, E_2, μ_1, μ_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов контактирующих тел.

Во-вторых, такой контакт может рассматриваться как модель контакта двух выступов шероховатости поверхностей контактирующих деталей. Модель выступов шероховатости в виде сферических сегментов успешно используется в механике контактного взаимодействия технических поверхностей [8].

Для принятой модели контакта, с учетом формулы (3) при $m = 2/3$, фактическая площадь контакта

$$A_r = \pi a^2 = CN^{\frac{2}{3}},$$

где $C = \pi \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{r}{E^*} \right)^{\frac{2}{3}}$.

Пример зависимости (3) приведен на рис. 1 для единичного контакта шарового стального индентора диаметром 1 мм с плоской поверхностью стального образца. Условно приняты следующие параметры удельной силы трения: $\tau_0 = 20$ МПа, $\beta = 0,1$.

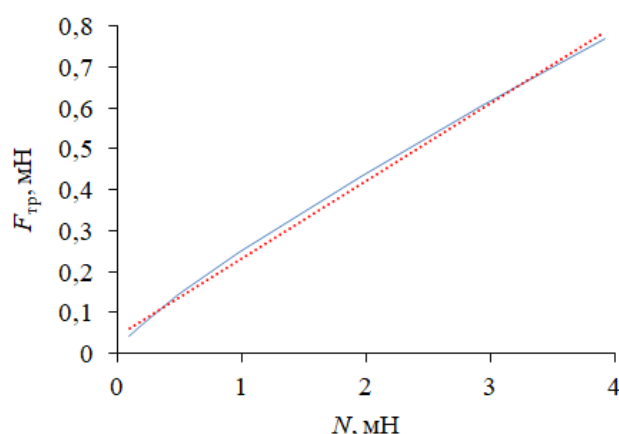


Рис. 1. Пример зависимости силы трения от нормальной нагрузки: сплошная линия – расчет по формуле (3); пунктир – аппроксимация линейной зависимостью

Из рис. 1 видно, что зависимость силы трения от нормальной нагрузки нелинейная, однако хорошо аппроксимируется линейной зависимостью (2) с параметрами $F_0 = 0,044$ мН, $f_c = 0,189$ (коэффициент корреляции 0,998).

Анализ показывает, что в рассматриваемом случае единичного контакта параметр F_0 зависит от параметра τ_0 и не зависит от параметра β , в то же время параметр f_c зависит как от τ_0 , так и от β (рис. 2).

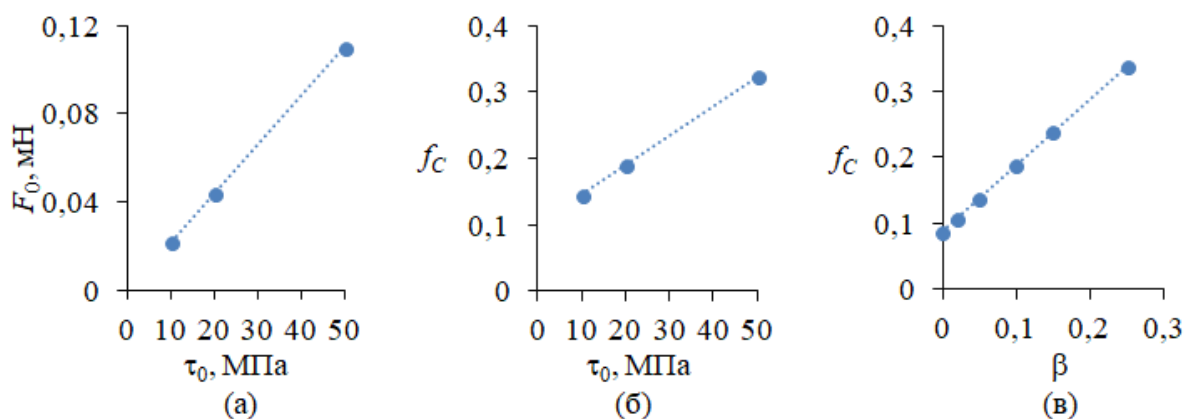


Рис. 2. Зависимость параметров интегральной силы трения от параметров удельной силы трения для единичного контакта: F_0 от τ_0 (а); f_c от τ_0 (б); f_c от β (в)

Множественный контакт. Под множественным контактом в данном случае понимается контакт ансамбля выступов шероховатости контактирующих технических поверхностей, распределенных по высоте шероховатого слоя. Каждый из выступов, как отмечено выше, моделируется сферическим сегментом. Такая модель контакта приводит к зависимости фактического контактного давления от нормальной нагрузки, которую в общем случае можно выразить формулой [8]:

$$p_r = E^* \left(\frac{Ra}{r} \right)^n \left(\frac{p_n}{E^*} \right)^m,$$

или

$$p_r = E^{*(1-m)} \left(\frac{Ra}{r} \right)^n p_n^m,$$

где Ra – арифметическое среднее отклонение профиля шероховатой поверхности контактирующих деталей от средней линии профиля (ГОСТ Р ИСО 4287-2014); r – средний радиус кривизны вершин выступов профиля; p_n – номинальное давление, $p_n = N/A_n$; A_n – номинальная площадь контакта.

Обозначив $C = E^{*(1-m)} \left(\frac{Ra}{r} \right)^n$ и используя, как и в предыдущем разделе, для удельной силы трения двучленную линейную функцию (1), для интегральной силы трения получим выражение, аналогичное уравнению (3):

$$F_{mp} = \frac{\tau_0 A_n^m}{C} N^{1-m} + \beta N. \quad (5)$$

Типичный вид зависимости силы трения от нормальной нагрузки, согласно уравнению (5), представлен на рис. 3. В расчетах приняты параметры модельного контакта, типичные для контакта стальных поверхностей после механической обработки (например, шлифования): $m = 1/6$, $n = 2/5$, $Ra/r = 0,01$. Параметры удельной силы трения, как и в предыдущем разделе, приняты следующие: $\tau_0 = 20$ МПа, $\beta = 0,1$.

Зависимость интегральной силы трения от нормальной нагрузки, формально будучи нелинейной, очень хорошо (даже лучше, чем в случае единичного контакта) аппроксимируется линейной зависимостью, о чем наглядно свидетельствует рис. 3.

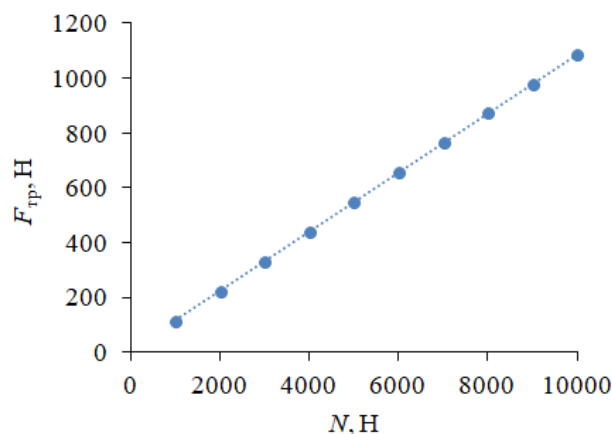


Рис. 3. Типичный вид зависимости интегральной силы трения от нормальной нагрузки для контакта технических поверхностей (множественный контакт): точки – расчет по формуле (5); пунктир – линейная аппроксимация

Аналогично единичному контакту, параметры линейной аппроксимации зависимости $F_{тр}(N)$ определяются параметрами исходного уравнения (1): F_0 зависит от параметра τ_0 и не зависит от параметра β , параметр f_c зависит как от τ_0 , так и от β (рис. 4).

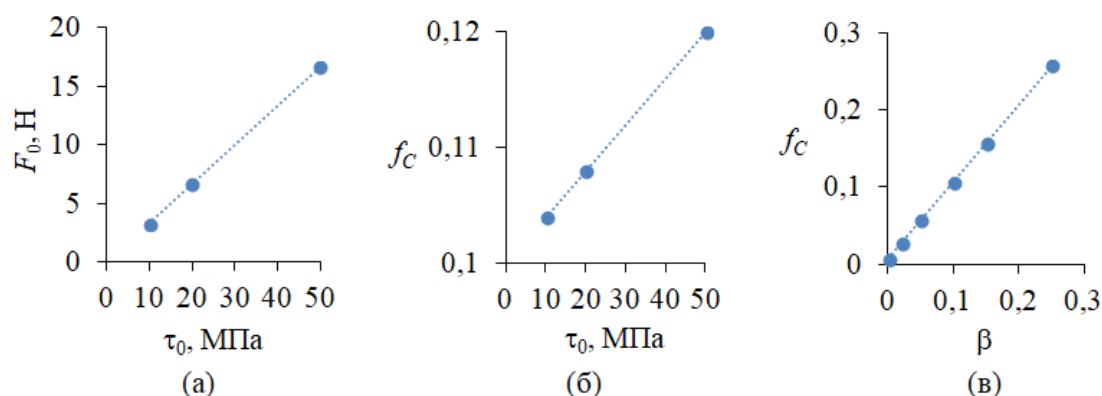


Рис. 4. Зависимость параметров интегральной силы трения от параметров удельной силы трения для множественного контакта: F_0 от τ_0 (а), f_c от τ_0 (б), f_c от β (в)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОБРАЗЦЫ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Для экспериментального подтверждения теоретических выводов использовали микротрибометр [9], который позволяет определять зависимость силы трения от нормальной нагрузки в условиях единичного контакта (см. выше) шарового индентора с плоским образцом.

Исследованные пары трения перечислены в табл. 1, их компоненты представляют все основные типы кристаллических решеток металлов: объемноцентрированную кубическую (Mo, W), гранецентрированную кубическую (Ag, Au), гексагональную плотноупакованную (Zr).

Таблица 1. Материалы пар трения

Пара трения шар/плоскость	Кристаллографические и кристаллохимические особенности данной пары трения
Серебро/золото	Неограниченная взаимная растворимость (образуют непрерывный ряд твердых растворов). Атомные диаметры практически одинаковы (отличие 0,7 %). Кристаллические решетки одного типа. Малая толщина поверхностных пленок
Серебро/вольфрам	Низкая взаимная растворимость. Атомные диаметры умеренно отличаются (менее чем на 3 %). Кристаллические решетки различных типов
Цирконий/серебро	Умеренная взаимная растворимость. Атомные диаметры сильно различаются (отличие более 10 %)
Молибден/вольфрам	Высокая взаимная растворимость (образуют непрерывный ряд твердых растворов). Атомные диаметры практически одинаковы (отличие 0,7 %). Кристаллические решетки одного типа

Диаметр шаровых инденторов во всех экспериментах был равен 1 мм, шероховатость контактирующих поверхностей $Ra \leq 0,16$ мкм, что позволяет считать их в данных условиях контактирования гладкими. Внешняя нормальная нагрузка N на контакт создавалась разновесами и изменялась в диапазоне 0,5...4 мН. Диапазон нагрузок, механические свойства материалов пар трения и шероховатость поверхности образцов обеспечивают заведомо упругий контакт, при этом деформационной составляющей сил трения можно пренебречь. Перед экспериментом поверхность образцов обрабатывали полярным и неполярным растворителями и протирали хлопчатобумажной тканью.

На микротрибометре экспериментально определяли зависимость силы трения от нормальной нагрузки $F_{тр}(N)$. Вычислив по формуле (4) радиус контакта $a(N)$, рассчитывали удельную силу трения $\tau = \frac{F_{тр}}{\pi a^2}$ и фактическое контактное давление $p_r = \frac{N}{\pi a^2}$. Полученные данные позволяют построить линейную регрессионную модель зависимости удельной силы трения от фактического контактного давления вида $\tau = \tau_0 + \beta p_r$ и определить коэффициенты τ_0 и β . Примеры таких регрессионных зависимостей представлены на рис. 5.

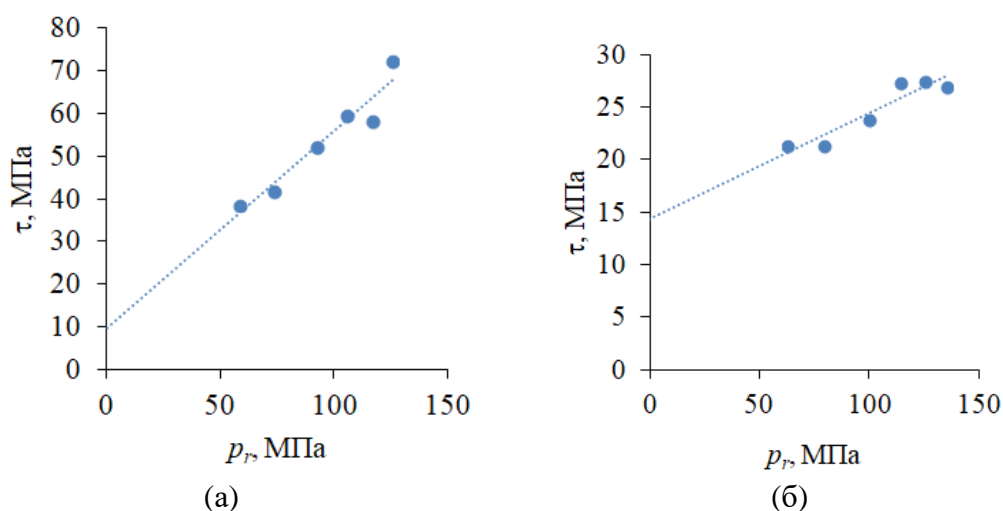


Рис. 5. Примеры регрессионных зависимостей удельной силы трения от фактического контактного давления для пар трения: серебро/золото (а); цирконий/серебро (б). Точки – расчетные значения, пунктир – линейная аппроксимация

Исходя из линейной регрессионной зависимости $\tau(p_r)$ и вычисленных ранее размеров площадки контакта, рассчитывали зависимость интегральной силы трения от нормальной нагрузки $F_{тр}(N)$ и сравнивали ее с аналогичной экспериментальной зависимостью. Результаты сравнения обсуждаются ниже.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 6 представлены результаты сравнения экспериментальных и расчетных зависимостей силы трения от нормальной нагрузки для пар трения из табл. 1. Из рисунка видно, что экспериментальные зависимости $F_{тр}(N)$ хорошо аппроксимируются линейными зависимостями. Расчетные зависимости нелинейны, как это следует из теоретического анализа. Однако в исследованном диапазоне нормальных нагрузок эта нелинейность незначительна и расчетные значения сил трения хорошо ложатся на линейные аппроксимации экспериментальных зависимостей $F_{тр}(N)$.

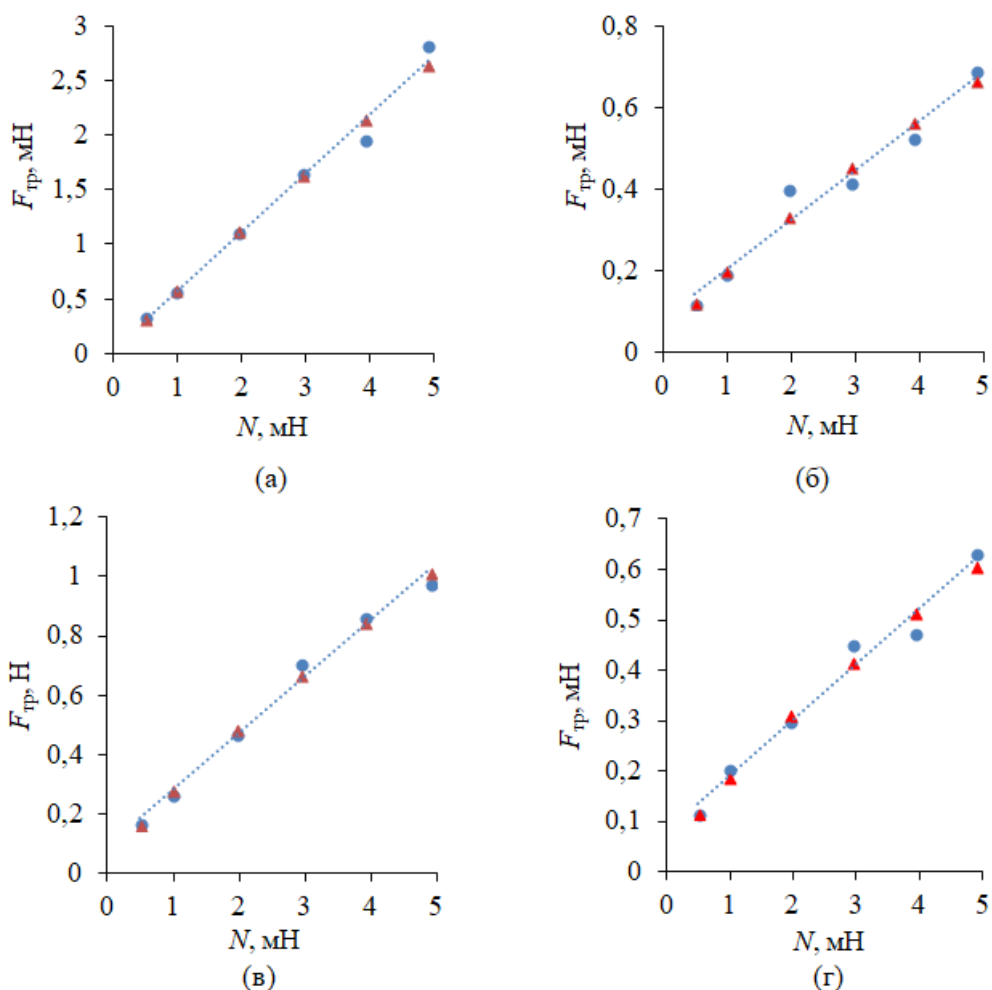


Рис. 6. Зависимости силы трения от нормальной нагрузки для пар трения: серебро/золото (а); серебро/вольфрам (б); цирконий/серебро (в); молибден/вольфрам (г). ● – эксперимент, ▲ – расчет, пунктир – линейная аппроксимация экспериментальных данных

Этот вывод подтверждается данными табл. 2, в которой приведено сравнение экспериментальных и расчетных параметров интегральной силы трения, определенных как коэффициенты линейной регрессии зависимой переменной $F_{тр}$ на независимую переменную N . Параметр F_0 для пары трения серебро/золото в табл. 2 не приводится, так как его значение статистически незначимо.

Таблица 2. Параметры интегральной силы трения

Пара трения шар/плоскость	Экспериментальные значения		Расчетные значения	
	F_0 , мН	f_c	F_0 , мН	f_c
Серебро/золото	–	$0,54 \pm 0,030$	–	0,53
Серебро/вольфрам	$0,084 \pm 0,036$	$0,12 \pm 0,012$	0,078	0,12
Цирконий/серебро	$0,096 \pm 0,033$	$0,19 \pm 0,011$	0,087	0,19
Молибден/вольфрам	$0,079 \pm 0,027$	$0,11 \pm 0,009$	0,080	0,11

Параметры удельной силы трения τ_0 и β , определенные как параметры линейной регрессионной зависимости вида (1), приведены в табл. 3. Из табл. 2 и 3 следует, что параметр β по величине меньше, причем иногда существенно, чем аналогичный параметр f_c , что согласуется с рис. 2в. При этом наблюдается очень тесная корреляция коэффициента трения f_c и параметра β (коэффициент корреляции близок к 1). Какой-либо значимой корреляции параметров τ_0 и F_0 не прослеживается.

Для пар трения серебро/вольфрам и молибден/вольфрам удельная сила трения очень слабо зависит от фактического контактного давления (параметр β мал), и в исследованном диапазоне давлений ее можно считать постоянной.

Таблица 3. Параметры удельной силы трения

Пара трения шар/плоскость	τ_0 , МПа	β
Серебро/золото	$9,6 \pm 6,4$	$0,46 \pm 0,065$
Серебро/вольфрам	$16,9 \pm 4,4$	$0,040 \pm 0,032$
Цирконий/серебро	$14,4 \pm 1,91$	$0,10 \pm 0,018$
Молибден/вольфрам	$34,2 \pm 5,23$	$0,026 \pm 0,019$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с поставленной целью было проведено сравнение полученных из эксперимента зависимостей силы трения от нормальной нагрузки $F_{тр}(N)$ и аналогичных расчетных зависимостей, полученных на основании уравнения линейной регрессии удельной силы трения τ на фактическое контактное давление p_r вида (1). Несмотря на нелинейный характер расчетных зависимостей $F_{тр}(N)$, в исследованном диапазоне нагрузок эта нелинейность проявляется слабо и расчетные зависимости хорошо совпадают с экспериментальными, которые, в свою очередь, успешно аппроксимируются двучленным законом трения Ш. Кулона (см. уравнение (2)).

Показано, что параметры F_0 и f_c уравнения, выражающего закон трения Кулона, и параметры τ_0 и β линейной зависимости удельной силы трения от фактического контактного давления взаимосвязаны, при этом F_0 зависит только от τ_0 , а коэффициент трения f_c – как от τ_0 , так и от β .

ЛИТЕРАТУРА

1. Измайлов В.В., Афанасьева Л.Е., Новоселова М.В. О фрикционных характеристиках поверхности лазерной наплавки никелевого сплава // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2026. № 1 (29). С. 53–61.
2. Измайлов В.В., Гусев А.Ф., Новоселова М.В. О регрессионных зависимостях, используемых для описания фрикционного взаимодействия технических поверхностей // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2026. № 1 (29). С. 46–53.
3. Шустер Л.Ш. Адгезионное взаимодействие твердых металлических тел. Уфа: Гилем, 1999. 199 с.
4. Мышкин Н.К., Петроковец М.И. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения трибологии. М.: Физматлит, 2007. 368 с.

5. Бриджмен П.У. Исследования больших пластических деформаций и разрыва: Влияние высокого гидростатического давления на механические свойства материалов. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 448 с.

6. Хопин П.Н., Шишкин С.В. Трибология: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2021. 236 с.

7. Доценко А.И., Буяновский И.А. Основы триботехники: учебник. М.: ИНФРА-М, 2014. 336 с.

8. Измайлов В.В., Новоселова М.В. Основы механики и физики контактного взаимодействия, трения и изнашивания технических поверхностей: учебное пособие для вузов. СПб.: Лань, 2025. 172 с.

9. Патент РФ 2150688. *Способ определения коэффициента трения покоя поверхностных слоев материала* / Измайлов В.В., Гусев А.Ф., Нестерова И.Н., Иванова А.А. Заявл. 25.12.1998. Оpubл. 10.06.2000, Бюл. № 16.

Для цитирования: Измайлов В.В., Новоселова М.В. Удельные и интегральные характеристики фрикционного взаимодействия в контакте технических поверхностей // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2026. № 2 (30). С. 69–78.

SPECIFIC AND INTEGRAL CHARACTERISTICS OF FRICTIONAL INTERACTION IN CONTACT OF ENGINEERING SURFACES

V.V. IZMAILOV, Dr. Sc., M.V. NOVOSELOVA, Cand. Sc.

Tver State Technical University
22, Af. Nikitin emb., Tver, 170026, e-mail: iz2v2@mail.ru

On the base of single and multiple contacts between engineering surfaces as examples, the correspondence between well-known tribological linear relationships describing their frictional interaction was analyzed, namely: the relationship between the specific friction force and the actual contact pressure and the relationship between the friction force and the external normal load (Coulomb's friction law). It is shown that the linear relationship between the specific friction force and the actual contact pressure generally corresponds to a nonlinear relationship between the friction force and the external normal load. The cause of this nonlinearity is the dependence of the real contact area on the normal contact load. However, over a limited range of normal contact load variation, this nonlinearity is weak, especially for multiple contacts. Therefore, the relationship between the friction force and the normal load can be adequately described by a binomial linear equation expressing Coulomb's friction law. The validity of this assertion is verified experimentally using four metal friction pairs.

Keywords: engineering surfaces, real contact area, friction force, specific friction force, Coulomb's friction law.

Поступила в редакцию/received: 12.01.2026; после рецензирования/ revised: 19.01.2026;
принята/accepted: 23.01.2026