

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

УДК 519.8

DOI: 10.46573/2658-5030-2026-3-91-96

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ

О.Д. БЕЛОВА, магистрант, Ю.Н. МАТВЕЕВ, д-р техн. наук

Тверской государственный технический университет,
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: iamoksib@yandex.ru

© Белова О.Д., Матвеев Ю.Н., 2026

В статье рассмотрена задача поиска приближенного решения оптимального управления на бесконечном горизонте с использованием синтеза оптимального закона управления с обратной связью для динамических систем. Предложена схема последовательных редукций, позволяющая перейти от непрерывной постановки задачи к конечномерной дискретной модели. Для решения полученной системы уравнений динамического программирования применен метод последовательных приближений.

Ключевые слова: оптимальное управление, синтез обратной связи, динамическое программирование, уравнение Беллмана, метод последовательных приближений, дискретизация.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных задач оптимального управления состоит в удержании систем в некоторой окрестности заданного состояния на бесконечном времени [1]. Такой способ мы будем называть задачей с бесконечным горизонтом. Практические потребности оптимального управления требуют, чтобы решение упомянутой задачи искалось в виде закона управления с обратной связью.

Прямое решение задачи синтеза обратной связи обладает огромными вычислительными трудностями. Поэтому целью настоящей работы является разработка [2, 3] алгоритма приближенного решения упомянутой задачи. Алгоритм основан на построении цепочки, позволяющей перейти от непрерывной задачи синтеза к алгоритмически реализуемому поиску закона управления с обратной связью.

ПОСТАНОВКА ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть X – это пространство состояний некоторой динамической системы, U – пространство управлений. Будем считать, что X и U – полные нормированные пространства над телом действительных чисел $\mathbf{R}$.

Предположим, что эволюция состояний системы характеризуется дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u), \quad (1)$$

где $g: X \times U \rightarrow X$ – липшицева по совокупности переменных функция. Будем считать, что начальное состояние задано:

$$x(0) = c.$$

Задача оптимального управления [1] состоит в том, что мы должны отыскать закон управления с обратной связью:

$$u(t) = \pi(x(t)), t \geq 0,$$

такой, что

$$g(u) = \int_0^{+\infty} h(x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (2)$$

где $\pi: X \rightarrow U$ и $h: X \times U \rightarrow R$ – липшицевы по совокупности переменных функции. Интеграл в выражении (2) должен сходиться, поэтому необходимо выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|h(x(t), u(t))\| = 0. \quad (3)$$

Условие сходимости является фундаментальным требованием корректности задачи: оно гарантирует, что суммарные накопленные затраты остаются конечными при $t \rightarrow \infty$. Это физически соответствует достижению системой устойчивого равновесия или целевого множества с затухающей динамикой.

Если условие (3) выполнено, то мы можем говорить следующее.

Утверждение 1. Если существует хотя бы один закон управления

$$u(t) = \pi(x(t)),$$

для которого

$$\left| \int_0^{+\infty} h(x(t), u(t)) \pi(x(t)) dt \right| < +\infty,$$

то решение задачи (1), (2) существует.

ПЕРВАЯ РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ

Первая редукция задачи состоит в переходе от непрерывной модели динамики к ее дискретному аналогу.

Для задачи с дискретным временем уравнение (1) заменяется уравнением

$$x_{n+1} = x_n + g(x_n, u_n) \Delta t, \quad (4)$$

где Δt – шаг дискретизации по времени. Начальное состояние по-прежнему задано как

$$x(0) = c.$$

Закон управления тоже будет дискретным, а интеграл заменяется суммой. Тогда имеем

$$J_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(x_n, u_n) \Delta t \rightarrow \inf. \quad (5)$$

Утверждение 2. Если существует хотя бы один закон управления

$$u_n = \hat{\pi}(x_n),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, для которого

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} h(x_n, \hat{\pi}(x_n)) \right| < +\infty,$$

то решение задачи (4), (5) существует.

Для построения решения задачи можем применить динамического программирования [4], после чего задача превратится в задачу об отыскании функционального уравнения

$$f(c) = \inf [h(c, \pi(c)) \Delta t + f(c, c + g(c, \pi(c)) \Delta t)]. \quad (6)$$

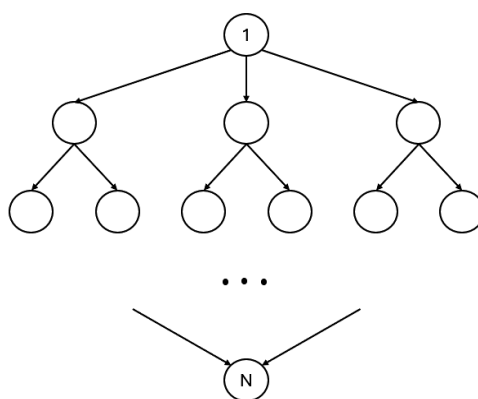
Таким образом, исходная задача оптимального управления упрощается до более простой задачи о построении решения уравнения (6) в банаховом пространстве.

ВТОРАЯ РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ

Вторая редукция задачи направлена на преодоление вычислительных трудностей, возникающих при непосредственном решении уравнения Беллмана [4].

Применяемая фиксация конечного множества управлений позволяет интерпретировать задачу поиска оптимального закона управления как задачу обхода взвешенного ориентированного графа [5, 6]. Это означает, что задача синтеза управления трансформируется в задачу отыскания оптимального потока или стратегии перемещения по сети из начальной вершины в целевую [7, 8].

Применив некоторые управления, получим набор новых состояний. В итоге у нас появляется состояние N , которое мы считаем «хорошим», т.е. тем, что будет обеспечивать существование решения исходной задачи. В результате получается задача о минимизации потока на сети из состояния 1 в состояние N . Таким образом, мы генерируем сеть, где 1 – начальное состояние, а N – целевое (рисунок).



Образец сгенерированной сети

Утверждение 3. Если существует хотя бы один путь из вершины 1 в вершину N , то минимальный путь существует.

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ НА СЕТИ

Существует несколько альтернативных способов численного решения сформулированной дискретной задачи. Здесь мы отметим алгоритм Дейкстры [9] и алгоритм Беллмана [4]. Первый дает путь, но не закон управления [10]. Второй лишен этого недостатка. Поэтому мы будем применять алгоритм Беллмана, основанный на методе последовательных приближений.

Кроме того, будем пользоваться алгоритмом [4] по причине его хорошей сходимости.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для практической проверки теоретических положений и оценки эффективности предложенного алгоритма было разработано приложение с интуитивно понятным графическим интерфейсом. Данное приложение реализует два альтернативных подхода [11, 12] к поиску оптимального пути: классический алгоритм Дейкстры [9] и модифицированный алгоритм [4] с применением метода последовательных приближений для решения системы уравнений динамического программирования.

В ходе вычислительного эксперимента рассматривался граф, содержащий 100 вершин и произвольное количество ребер с положительными весовыми коэффициентами, моделирующими время прохождения соответствующих участков пути. Цель эксперимента заключалась в нахождении оптимального маршрута из вершины 1 в вершину 100 с минимальными суммарными затратами.

Ключевым аспектом эксперимента является анализ вычислительной эффективности методов. Алгоритм [4] с использованием метода последовательных приближений показал следующие характеристики:

время выполнения: 2,06 мс;

количество итераций: 12;

проверок ребер: 3 302;

операций релаксации: 337.

Для сравнения, классический алгоритм Дейкстры продемонстрировал:

время выполнения: 4,25 мс;

количество обработанных вершин: 107;
проверок ребер: 254;
операций релаксации: 106.

Полученные результаты свидетельствуют о существенном преимуществе алгоритма [4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный алгоритм позволяет в некотором приближении получить алгоритм, пригодный для построения оценок оптимального управления с обратной связью в задачах слежения на бесконечном горизонте. Важной особенностью является то, что линейность управляемой системы не предполагается. Алгоритм дает удобную вычислительную процедуру, которая в некоторых случаях может оказаться эффективной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 578 с.
2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 3-е изд. М.: Вильямс, 2013. 1328 с.
3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. 536 с.
4. Беллман Р., Каллаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969. 120 с.
5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
6. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.
7. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М.: Физматлит, 2012. 584 с.
8. Сысоев А.С., Ляпин С.А., Галкин А.В., Ризаева Ю.Н., Кадасев Д.А., Хабибуллина Е.Л. Интеллектуальные методы управления транспортными системами: монография, 2-е изд. М.: Дашков и К, 2022. 192 с.
9. Dijkstra E.W. A note on two problems in connexion with graphs // *Numerische Mathematik*. 1959. V. 1. P. 269–271.
10. Silva T.K.D.S., Resende M.G.C., Pardalos P.M., Filho J.C.M. Dijkstra-based algorithms for shortest path with negative edges // *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 2013. V. 56. № 2. P. 103–118.
11. Moura M.A.C., Machado R.C.S., Carvalho L.H.V. Shortest paths on dynamic graphs: a survey. 2017. arXiv:1705.02044. 45 p. URL: <https://arxiv.org/abs/1705.02044> (дата обращения: 10.03.2026).
12. AbuSalim S.W., Ibrahim R., Zainuri Saringat M., Jamel S., Abdul Wahab J. Comparative analysis between dijkstra and bellman-ford algorithms in shortest path optimization // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 917. № 1. P. 012077.

Для цитирования: Белова О.Д., Матвеев Ю.Н. Алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления на бесконечном горизонте // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2026. № 3 (31). С. 91–96.

ALGORITHM FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL ON AN INFINITE HORIZON

O.D. BELOVA, Magister, Yu.N. MATVEEV, Dr. Sc.

Tver State Technical University,
22, Af. Nikitin emb., Tver, 170026, e-mail: iamoksib@yandex.ru

The article addresses the problem of finding an approximate solution to the optimal control problem over an infinite horizon through the synthesis of an optimal feedback control law for dynamical systems. A sequential reduction scheme is proposed to transition from a continuous problem formulation to a finite-dimensional discrete model. The method of successive approximations is applied to solve the resulting system of dynamic programming equations.

Keywords: optimal control; feedback control synthesis; dynamic programming; Bellman equation; method of successive approximations; discretization.

Поступила в редакцию/received: 18.05.2026; после рецензирования/revised: 20.05.2026;
принята/accepted: 26.05.2026

УДК 004.942

DOI: 10.46573/2658-5030-2026-3-96-102

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ЧАСТИЧНОЙ АВТОМАТИЗАЦИИ ОЦЕНКИ ТРУДОЗАТРАТ В ИТ-ПРОЕКТАХ

Р.А. ЛУКЬЯНОВ, асп., К.А. КАРЕЛЬСКАЯ, канд. техн. наук

Тверской государственный технический университет,
170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: rlukyanov12@yandex.ru

© Лукьянов Р.А., Карельская К.А., 2026

Статья посвящена исследованию потенциала применения регрессионных моделей в контексте итеративно-инкрементальной методологии управления ИТ-проектами. Раскрыты теоретические основы и методологические подходы, лежащие в основе данного направления, а также проанализирован практический опыт настройки и разработки регрессионных моделей. Рассмотрена их эффективность при оценке трудозатрат и планировании ресурсов в сфере информационных технологий.

Ключевые слова: регрессионная модель, масштабирования данных, машинное обучение, автоматизация, оценка метрик модели машинного обучения, гибкая методология, управление ИТ-проектами.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире активно развивается информатизация, в связи с чем расширяется промышленный сектор по реализации информационно-технологических продуктов и решений. Этот процесс сопровождается увеличением объема и сложности